

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2007 ☞
(spécialité)

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Question de cours

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. On considère les points $A(1; 2; -3)$, $B(-3; 1; 4)$ et $C(2; 6; -1)$.

- Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
- Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.
- Soit I le point de coordonnées $(-5; 9; 4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite \mathcal{D} passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).
- Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABC).
- En déduire la distance du point I au plan (ABC).

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

- a. $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ b. $\frac{9}{8}$ c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ d. $\frac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

- a. 0 b. $\left(\frac{1}{8}\right)^3$ c. $\frac{23}{128}$ d. $\frac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0; 1]$ lorsque

- a. $m = -1$ b. $m = \frac{1}{2}$ c. $m = e^{\frac{1}{2}}$ d. $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

- a. $1 - \frac{1}{e}$ b. $\frac{1}{e}$ c. $\frac{1}{5e}$ d. $\frac{1}{0,2}(e - 1)$

EXERCICE 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

- Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?
- Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.
- Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
 - On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p . Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.
 - Coder le mot AMI.
- On se propose de décoder la lettre E.
 - Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.
 - On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
 - Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.
 - Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.
 - En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.
 - Décoder alors la lettre E.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

- Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

- En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$$

- b. Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$$

- c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

- a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$$

- b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0 , on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

- c. En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

- d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$$

- e. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

- f. Déterminer la limite de la suite (u_n) .