Durée : 4h00

$\mathbb{E}$xercice 1 :

Commun à tous les candidats **4 points**

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des trois propositions A, B ou C est exacte. La candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a) La probabilité de tirer trois boules noires est :
A. $\frac{1}{56}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{3!}$

b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :
A. $\frac{11}{56}$ B. $\frac{11}{120}$ C. $\frac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :
A. $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$ B. $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules blanches est :
A. $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :
R_1 l'événement : "La première boule tirée est rouge" ;
R_2 l'événement : "La deuxième boule tirée est rouge" ;
N_1 l'événement : "La première boule tirée est noire" ;
N_2 l'événement : "La deuxième boule tirée est noire".

a) La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :
A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{14}$

b) La probabilité de l'événement $R_1 \cap N_2$ est :
A. $\frac{16}{49}$ B. $\frac{15}{64}$ C. $\frac{15}{56}$

c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :
A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{28}$

d) La probabilité de tirer une boue rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :
A. $\frac{15}{56}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{7}$

$\mathbb{E}$xercice 2 :

RÉSERVÉ AUX CANDIDATS N'AYANT PAS CHOISI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 points**

I. Restitution organisée de connaissances.

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égaité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

II. Etude d'un cas particulier.
On pose : $a = 3 + i$, $b = -1 + 3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B,C, et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Etude du cas général.
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$$

2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.
   a) En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le **I**, démontrer que w est un imaginaire pur.
   b) Vérifier l'égalité : $(b + c)(\overline{b} - \overline{c}) = w$ et justifier que : $\dfrac{b + c}{b - c} = \dfrac{w}{|b - c|^2}$.
   c) En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b + c}{b - c}$ est un imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a + b + c$.
   a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   b) Prouver que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.
   (On admet de même que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$).
   c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

$\mathbb{E}$xercice 2 :

RÉSERVÉ AUX CANDIDATS AYANT CHOISI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm. Le but de l'exercice est d'étudier la similitude plane **indirecte** f d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}\,\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances.
On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane **directe** autre qu'une translation est de la forme : $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes , avec $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et de b 'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f.
Soit g la similitude plane **directe** d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}\, z + 2i\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$.

III. Deuxième décomposition de f.
1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation : $y = x + 2$.
Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathcal{D}$, le point $f(N)$ appartient aussi à $\mathcal{D}$.

3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.
   a) Donner l'écriture complexe de σ.
   (Indication : on pourra poser $z' = a\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b).
   b) En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}\, z + 2\sqrt{2} - 2$.
   c) Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.

Exercice 3 :

Commun à tous les candidats **4 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f et f' ne s'annulant pas sur l'intervalle I.
On note M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et d'ordonnée $y = f(x)$.
On désigne par T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M.
On rappelle qu'une équation de T est de la forme : $Y = f'(x)[X - x] + f(x)$.

I. Question préliminaire.
1. Montrer que T coupe l'axe des abscisses en un point H dont l'abscisse X_T vérifie :

$$X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

2. Montrer que T coupe l'axe des ordonnées en un point K dont l'ordonnée Y_T vérifie :

$$Y_T = f(x) - xf'(x).$$

II. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $x - X_T$ est constante et égale à k, pour tout nombre réel x (Propriété 1).
1. Démontrer que f vérifie la propriété 1, si et seulement si, f vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{1}{k}y.$$

2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.

III. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $y - Y_T$ est constante et égale à k, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ (Propriété 2).
1. Démontrer que f vérifie la propriété 2, si et seulement si, f vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{k}{x}.$$

2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(1) = 0$.

$\mathbb{E}$xercice 4 :

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS **7 points**

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution.
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^x$.

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$.
   d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

II. Deuxième approche.
On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'equation : $g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α.
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

3. Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de l.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.