Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On pose $a = 3$, $b = 5-2\text{i}$ et $c = 5+2\text{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.
   a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
   b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$.
   c. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.
2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2-\text{i}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Calculer $P(X = 0)$.
   c. On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.
   – Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\dfrac{8}{45}$.
   – En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.
2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
Soit k un entier compris entre 1 et n.
Soit N l'évènement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».
Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ».
Calculer $P(\text{A})$, $P_{\text{A}}(\text{B})$ et $P(\text{N})$.

Exercice 3 **7 points**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

   d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   Déterminer I_2 et I_3.

   c. Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathscr{A}$.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction v sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (où $0 < a < b$).
   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\ ;\ \dfrac{1}{a}\right]$.

   b. On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
   Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

   c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
   On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -7 + 2t \\ y & = & -8 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z & = & t \end{array}\right.$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\ ;\ -4\ ;\ -1)$.

   a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

   b. Exprimer AM^2 en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

- Étudier les variations de f.
- Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?
  Dans la suite, on désignera ce point par I.
- Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation de (Q).

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).