

## ♫ Baccalauréat S Asie juin 2006 ♫

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 2 cm).

On rappelle que pour tout vecteur  $\vec{w}$  non nul, d'affixe  $z$ , on a :  $|z| = \|\vec{w}\|$  et  $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$  à  $2\pi$  près.

#### Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

#### Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives  $-i$  et  $3i$ .

On note  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  du plan, d'affixe  $z$ , distinct de A, associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \frac{iz + 3}{z + i}$$

- Étude de quelques cas particuliers.
  - Démontrer que  $f$  admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].  
Placer ces points sur le dessin.
  - On note C le point d'affixe  $c = -2 + i$ . Démontrer que le point  $C'$ , image de C par  $f$ , appartient à l'axe des abscisses.
- Pour tout point  $M$  du plan distinct de A et B, démontrer que  $\arg(z') = (\vec{MA}, \vec{MB}) + \frac{\pi}{2}$  à  $2\pi$  près.
- Étude de deux ensembles de points.
  - Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit un nombre complexe imaginaire pur.
  - Soit  $M$  d'affixe  $z$  un point du cercle de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point  $M'$  ?

### EXERCICE 2

5 points

#### Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur la feuille annexe. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$ .

On note I le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{3}; 1; 1\right)$ .

- Placer le point I sur la figure.
- Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
- On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

- a. Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- Il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$ .
  - $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .
- b. Calculer les coordonnées du point R,
- c. En déduire que la distance IR s'exprime par  $IR = \frac{\sqrt{11}}{3}$ .
4. Démontrer que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées (3 ; -3 ; 2) est normal au plan (ACI).  
En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).
5. Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est  $\frac{5}{\sqrt{22}}$ .

**EXERCICE 2****5 points****Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Étant donné un entier naturel  $n \geq 2$ , on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$  modulo  $2^n$ .

**Partie A : Étude de deux cas particuliers**

- Dans cette question on suppose  $n = 2$ . Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.
- Dans cette question, on suppose  $n = 3$ .
  - Soit  $m$  un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste  $r$  de la division euclidienne de  $m$  par 8 et le reste  $R$  de la division euclidienne de  $m^2$  par 8.

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7
$R$								

- Peut-on trouver trois entiers naturels  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$  modulo 8 ?

**Partie B Étude du cas général où  $n \geq 3$** 

Supposons qu'il existe trois entiers naturels  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$  modulo  $2^n$ .

- Justifier le fait que les trois entiers naturels  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
- On suppose que  $x$  et  $y$  sont pairs et que  $z$  est impair. On pose alors  $x = 2q$ ,  $y = 2r$ ,  $z = 2s + 1$  où  $q$ ,  $r$ ,  $s$  sont des entiers naturels.
  - Montrer que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$  modulo 4.
  - En déduire une contradiction.
- On suppose que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont impairs.
  - Prouver que, pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $k^2 + k$  est divisible par 2.
  - En déduire que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$  modulo 8.
  - Conclure.

**EXERCICE 3****4 points****Commun à tous les candidats**

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier naturel non nul. On considère les événements :

- $G_n$  : « Pierre gagne la  $n$ -ième partie ».
- $P_n$  : « Pierre perd la  $n$ -ième partie ».

On pose :  $p_n = p(G_n)$  et  $q_n = p(P_n)$ .

1. Recherche d'une relation de récurrence.

- Déterminer  $p_1$  puis les probabilités conditionnelles  $p_{G_1}(G_2)$  et  $p_{P_1}(G_2)$ .
- Justifier l'égalité  $p_n + q_n = 1$ .
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$ .

2. Étude de la suite  $(p_n)$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $v_n = p_n - \frac{2}{5}$ .

- Prouver que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x}.$$

- Démontrer que la fonction  $u$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par  $u(x) = xe^{-x}$  est une solution de (E).
- Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y' + y = 0$ .
- Démontrer qu'une fonction  $v$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , est solution de (E) si et seulement si  $v - u$  est solution de  $(E_0)$ .
- En déduire toutes les solutions de (E).
- Déterminer la fonction  $f_2$ , solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

$k$  étant un nombre réel donné, on note  $f_k$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer les limites de  $f_k$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- Calculer  $f'_k(x)$  pour tout réel  $x$ .
- En déduire le tableau de variations de  $f_k$ .

Partie C

- On considère la suite d'intégrales  $(I_n)$  définie par  $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$ .

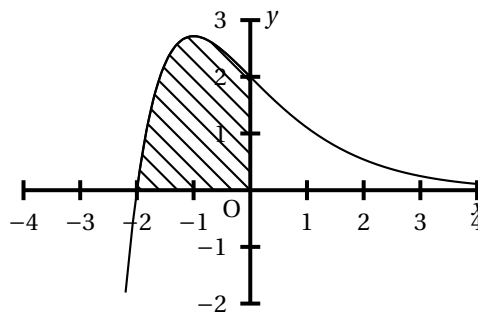
- Calculer la valeur exacte de l'intégrale  $I_0$ .
- En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n.$$

- c. En déduire les valeurs exactes des intégrales  $I_1$  et  $I_2$ .
2. Le graphique ci-dessous représente une courbe  $\mathcal{C}_k$  qui est la représentation graphique d'une fonction  $f_k$  définie à la partie B.

a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel  $k$  correspondant.

b. Soit  $\mathcal{S}$  l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire); exprimer  $\mathcal{S}$  en fonction de  $I_1$  et  $I_0$  et en déduire sa valeur exacte.



ANNEXE

Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

