Baccalauréat S Asie juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t \\ z & = & -3-t \end{array}\right.$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1\,;\,3\,;\,2)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point N de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,-1)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point R de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-4)$ appartient à $\mathcal{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,-3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
3.	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,-2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,-1)$ appartient à $\mathcal{P}$
5.	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ plan $\mathcal{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : $2\sqrt{3}$

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\dfrac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\dfrac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

   a. Calculer les probabilités $P(\text{V})$ et $P(\text{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $P_{\text{V}}(\text{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\text{V}}(\text{R})$ puis $P(\text{R} \cap \text{V})$.

c. Calculer $P(\text{R})$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\text{E}(X) = \dfrac{140 - 51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.

Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + \text{i})z^2 + (17 - 8\text{i})z + 17\text{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-\text{i}$ est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

$$z^3 + (-8 + \text{i})z^2 + (17 - 8\text{i})z + 17\text{i} = (z + \text{i})\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + \text{i},\ 4 - \text{i}, -\text{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.

3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.

4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}z + 10 - 2\text{i}}{z - 2}$.

   a. Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

   b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.

   c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - \text{i}|$ en fonction de z.

   d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que $|z' - \text{i}| = 2\sqrt{5}$.

   e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré $\mathcal{C}_1$ donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré $\mathcal{C}_2$ donné.

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives

$$-\frac{\text{i}}{2},\quad 1 - \frac{\text{i}}{2},\quad 1 + \frac{\text{i}}{2},\quad \frac{\text{i}}{2},\quad 1 - \text{i},\quad 3 - \text{i},\quad 3 + \text{i},\quad 1 + \text{i}.$$

$\mathcal{C}_1$ est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, $\mathcal{C}_2$ est le carré de sommet E, F G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble {A, B, C, D} et S_2 l'ensemble {E, F, G, H}.

1. Placer tous les points dans le repère $\mathcal{R}$, construire les carrés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe -1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.
3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g = h^{-1} \circ s$.

   a. Quel est le rapport de la similitude s ?

   b. Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.

   c. Démontrer que $g(\text{O}_1) = \text{O}_1$.

   d. En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   e. En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.

4. Étude des centres de ces similitudes.

   a. Déterminer les écritures complexes de $h \circ r_1$, $h \circ r_2$, $h \circ r_3$.

   b. En déduire les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 de ces similitudes et les placer sur le dessin.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2 - x)^n \text{e}^x \,\text{d}x.$$

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Démontrer par récurrence que $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$.
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

   a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que :

$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$