

∞ Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005 ∞

EXERCICE 1

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

(O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormal du plan \mathcal{P} .

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1 .

Soit F l'application de \mathcal{P} privé de O dans \mathcal{P} qui à tout point M d'affixe z distinct de

O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \frac{-1}{\bar{z}}$.

1.
 - a. Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F . Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
 - b. On note \mathcal{C}_1 le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de \mathcal{C}_1 par l'application F .
2.
 - a. Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F . Calculer l'affixe de K' .
 - b. Soit \mathcal{C}_2 le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de \mathcal{C}_2 par l'application F .
3. On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi ; \pi[$. R appartient au cercle \mathcal{C}_3 de centre A et de rayon 1.
 - a. Montrer que $z' + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z}}$.
En déduire que : $|z' + 1| = |z'|$.
 - b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi ; \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a..

EXERCICE 1

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.
 - a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n .
 - b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7 \pmod{9}$.
2.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1 \pmod{9}$.
 - b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
Démontrer la relation suivante : $N \equiv S \pmod{9}$.
 - c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
 - B la somme des chiffres de A ;
 - C la somme des chiffres de B ;
 - D la somme des chiffres de C .
 - a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D \pmod{9}$.
 - b. Sachant que $2\,005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72\,180$.
 - c. Démontrer que $C \leq 45$.
 - d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
 - e. Démontrer que $D = 7$.

EXERCICE 2**6 points****Commun à tous les candidats**

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; 1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}.$$

2. a. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$.

- b. Dédurre en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{puis que } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**)

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ .

Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

EXERCICE 3**3 points****Commun à tous les candidats**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies. 40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. 0,4 b. 0,75 c. $\frac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. 0,3 b. 0,8 c. 0,4

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est

a. 1,15 b. 0,4 c. 0,3

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
- a. 0,9 b. 0,7 c. 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
- a. $\frac{4}{150}$ b. $\frac{12}{19}$ c. 0,3
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :
- a. $1 - (0,25)^{20}$ b. $20 \times 0,75$ c. $0,75 \times (0,25)^{20}$

EXERCICE 4**6 points****Commun à tous les candidats**

A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL) .
Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L .

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points

$$A(4; 0; -3), \quad B(2; 2; 2), \quad C(3; -3; -1), \quad D(0; 0; -3).$$

- Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $4x - 4y - 10z - 13 = 0$.
On admet pour la suite que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ ont respectivement pour équations $2x - 10y - 6z - 7 = 0$ et $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.
- Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.
- En utilisant la **partie A** montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E . Quel est le rayon de cette sphère ?