

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S France septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun à tous les candidats

1. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

- a. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que l'on ait, pour tout  $x > 1$  :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

- b. Trouver une primitive  $G$  de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Trouver une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x \, dx.$$

On donnera le résultat exact sous la forme  $p \ln 2 + q \ln 3$ , avec  $p$  et  $q$  rationnels.

### EXERCICE 2

6 points

#### Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour  $x$  et  $y$  éléments distincts de l'intervalle  $]0; +\infty[$ , les couples solutions de l'équation  $x^y = y^x$  (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ .
2. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $h$  est donnée en annexe;  $x_0$  est l'abscisse du maximum de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- a. Rappeler la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$  et déterminer la limite de la fonction  $h$  en 0.

- b. Calculer  $h'(x)$ , où  $h'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $h$ ; retrouver les variations de la fonction  $h$ .  
Déterminer les valeurs exactes de  $x_0$  et de  $h(x_0)$ .
- c. Déterminer l'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
3. Soit  $\lambda$  un élément de l'intervalle  $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ .  
Prouver l'existence d'un unique nombre réel  $a$  de l'intervalle  $]1; e[$  et d'un unique nombre réel  $b$  de l'intervalle  $]e; +\infty[$  tels que  $h(a) = h(b) = \lambda$ .  
Ainsi le couple  $(a, b)$  est solution de (E).
4. On considère la fonction  $s$  qui, à tout nombre réel  $a$  de l'intervalle  $]1; e[$ , associe l'unique nombre réel  $b$  de l'intervalle  $]e; +\infty[$  tel que  $h(a) = h(b)$  (on ne cherchera pas à exprimer  $s(a)$  en fonction de  $a$ ).  
Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes
- a. Quelle est la limite de  $s$  quand  $a$  tend vers 1 par valeurs supérieures ?
- b. Quelle est la limite de  $s$  quand  $a$  tend vers  $e$  par valeurs inférieures ?
- c. Déterminer les variations de la fonction  $s$ . Dresser le tableau de variations de  $s$ .
5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et dans K2 avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  ;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .

**Partie A**

1. Soit une particule au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,  
 A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,  
 B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,  
 B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,  
 C1 : « la particule entre dans K1 »,  
 C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

**Partie B**

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives

et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note  $p(t)$  la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant  $t = 0$ , on a  $p(0) = 0,75$ .

Plus généralement, si  $t$  est exprimé en années, on a  $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$ , où  $\lambda$  est une constante réelle.

La demi-vie<sup>1</sup> des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer  $\lambda$  ; on prendra une valeur approchée décimale à  $10^{-5}$  près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de  $t$  pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

**EXERCICE 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{et} \quad b = 4\sqrt{3} + 4i.$$

- a. Écrire  $a$  et  $b$  sous forme exponentielle.
- b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe  $c = -\sqrt{3} + i$  et par D son image par la rotation de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ .  
Déterminer l'affixe  $d$  du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; -1), (D ; +1), (B ; +1).
  - a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe  $g = 4\sqrt{3} + 6i$ .
  - b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
  - c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
  - d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note  $\Gamma$  le cercle de diamètre [AC] et O le centre de  $\Gamma$  ; B est un point du cercle  $\Gamma$  distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc  $(\vec{BC}, \vec{BD}) = +\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ .

<sup>1</sup> temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

Le point  $G$  est le centre de gravité du triangle  $BCD$ .  
Les droites  $(AB)$  et  $(CG)$  se coupent en un point  $M$ .

### Partie A

1. Placer les points  $D$ ,  $G$  et  $M$  sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points  $O$ ,  $D$  et  $G$  appartiennent à la médiatrice du segment  $[BC]$  et que le point  $G$  est le milieu du segment  $[CM]$ .
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe  $s$  de centre  $C$  transformant  $B$  en  $M$ .

### Partie B

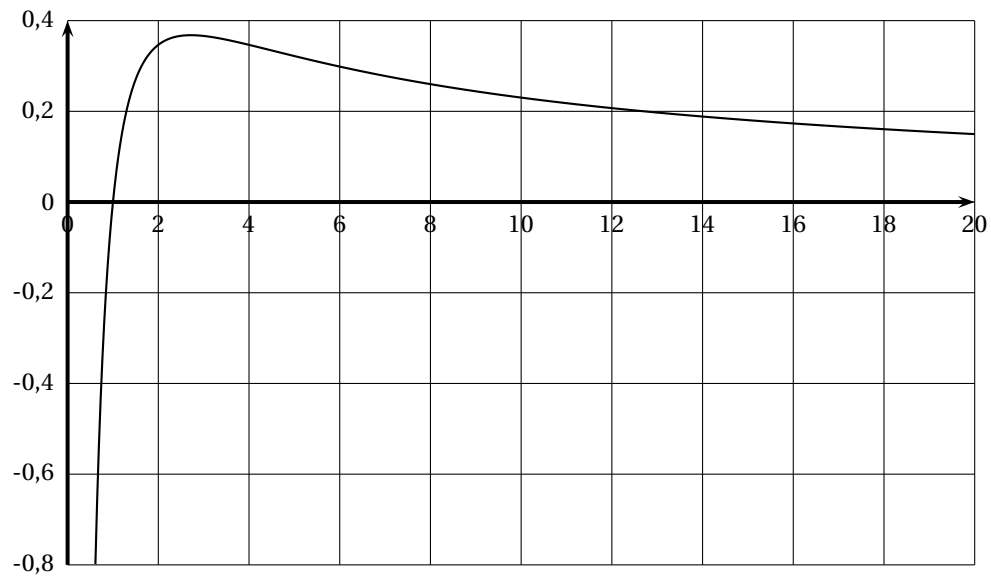
Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  choisi de telle sorte que les points  $A$  et  $C$  aient pour affixes respectives  $-1$  et  $1$ .

Soit  $E$  le point construit pour que le triangle  $ACE$  soit équilatéral direct ; on a donc  $(\vec{AC}, \vec{AE}) = +\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ .

1. Calculer l'affixe du point  $E$  et construire le point  $E$  sur la feuille annexe.
2. Soit  $\sigma$  la similitude directe d'expression complexe  $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$ .  
Déterminer les éléments caractéristiques de  $\sigma$  et en déduire que  $\sigma$  est la similitude réciproque de  $s$ .
3. Montrer que l'image  $E'$  du point  $E$  par  $\sigma$  a pour affixe  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et montrer que le point  $E'$  appartient au cercle  $\Gamma$ .
4. On note  $\mathcal{C}$  le lieu des points  $M$  lorsque le point  $B$  décrit le cercle  $\Gamma$  privé des points  $A$  et  $C$ .  
Montrer que le point  $E$  appartient à  $\mathcal{C}$ .  
Soit  $O'$  l'image du point  $O$  par la similitude  $s$ . Démontrer que le point  $O'$  est le centre de gravité du triangle  $ACE$ .  
En déduire une construction de  $\mathcal{C}$ .

## ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie

Courbe  $\mathcal{C}$ , obtenue à l'aide d'un traceur de courbes

## Annexe spécialité

