∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2004 ∾

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.

   On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

   Rappel :

   Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0~;~+\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :

   pour $0 \leqslant a \leqslant b,\ p([a~;~b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et

   pour $c \geqslant 0,\ p([c~;~+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -3 \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{I}} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

   b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{B}}}$.

   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

   c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

   d. Soit D le barycentre du système $\{(\mathrm{A},~1)~;~(\mathrm{B},~-1)~;~(C,~1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

   e. Montrer que ABCD est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}.$$

   a. Montrer que B appartient à Γ_2.

   b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 3 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$\mathrm{a} = 3 \qquad \mathrm{b} = 1 + \frac{2}{3}\mathrm{i} \qquad \mathrm{c} = 3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathrm{d} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.
3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.
4. Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ son image par s.

   Montrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' & = & \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{array}\right.$
5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{M}_0 & = & \mathrm{A} \\ \multicolumn{3}{l}{\text{et, pour tout entier naturel } n} \\ M_{n+1} & = & s(M_n) \end{array}\right.$$

   Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

   a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\mathrm{I}M_k \leqslant 10^{-3}$.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + \frac{1 - k\mathrm{e}^x}{1 + k\mathrm{e}^x}.$$

   a. Justifier que, pour rout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad : \quad 2y' = (y - x)^2 + 1.$$

   b. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D$'$ d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes $\mathscr{C}_k$ correspondant à des valeurs particulières de k.

Déterminer le réel k associé à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O puis celui associé à la courbe $\mathscr{C}'$ passant par le point A de coordonnées $(1 ; 1)$.

3. On remarque que, pour tout x réel, on a :

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + k\text{e}^x} \quad (1) \quad \text{et} \quad f_k(x) = x + 1 - \frac{2k\text{e}^x}{1 + k\text{e}^x} \quad (2).$$

En déduire pour tout k strictement positif :

– la position de la courbe $\mathscr{C}_k$ par rapport aux droites D et D$'$.
– les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_k$.

4. Cas particulier : $k = 1$.

  a. Justifier que f_1 est impaire.

  b. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f_1(t)\,\text{d}t.$$

  Interpréter graphiquement le réel $F(x)$ dans les deux cas : $x > 0$ et $x < 0$.
  Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

  c. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

  d. En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement $F(x)$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\text{e}^{-t^2}}{1 + n + t}\,\text{d}t.$$

1. **a.** Déterminer le sens de variations de cette suite.

  b. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

  c. Montrer que pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a $\dfrac{\text{e}^{-t^2}}{1 + t + n} \leqslant \dfrac{1}{1 + n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

  Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \text{e}^{-x}.$$

  a. Étudier le sens de variations et le signe de f.

  b. En déduire le sens de variations de g sur $[0 ; 1]$.

  c. Établir, pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant \text{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$.

e. Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

f. Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Document à rendre avec la copie

Annexe