

∞ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique : 2 cm.

On appelle A le point d'affixe $-2i$.

À tout point M du plan d'affixe z , on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\bar{z} + 2i.$$

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ) .
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z , $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$; interprétez géométriquement cette égalité.
4. Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de $z + 2i$.
 - a. Justifier que θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.
 - b. Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.
 - c. En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ .
 - d. Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?
5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M .

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n , la probabilité de R_n et q_n , celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.
 - a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
 - b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n .
 - c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n .
 - d. En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.
2. Étude de la suite (p_n) .
Pour tout entier naturel non nul n , on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

- b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n .
- c. Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers? »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1 \dots 1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
2. Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

- a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
 - b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
 - c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduire que N_p est divisible par N_k .
4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante ?

EXERCICE 3

9 points

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0; 1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

- (1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
- (2) f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$
- (3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leq x$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 10 cm.

I. Première partie Étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = xe^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \frac{x}{e}(e^x - e)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère \mathcal{R} .

II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f .

1. Justifier que $I_f = \int_0^1 [x - f(x)] dx$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g , associé à g .
3. On s'intéresse aux fonctions f_n , définies sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

- a. On pose $I_n = \int_0^1 [x - f_n(x)] dx$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. Prouver que $I_n = \frac{1}{2} - u_n$.

- b. Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0; 1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

- c. Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^n.$$

- d. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}$.
- e. Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.