∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2004 ∽

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1,\ b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

Soit D une droite munie d'un repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   Exprimez u_n en fonction de n.
3. Comparez a_n et b_n. Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.
6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Soit $a \in [0\ ;\ +\infty[$.

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\text{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\text{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que
$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$
4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\text{d}t$. Calculez $J(a)$.
6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0\ ;\ a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.
   b. Démontrez que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.
7. En déduire que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.
8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

   A : $2\sqrt{2}$ $B : 2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$ C : $2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right)$ $D : 2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

   A : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ B : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ C : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ D : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

   A : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$ B : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ C : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$ D : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

   A : $\dfrac{7\pi}{8}$ B : $\dfrac{5\pi}{8}$ C : $\dfrac{3\pi}{8}$ D : $\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit $\mathrm{G_1}$ le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{A},\ 1) ; (\mathrm{B},\ 1) ; (\mathrm{C},\ -1) ; (\mathrm{D},\ 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{\mathrm{IG_1}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. Placez I, J et $\mathrm{G_1}$ sur la figure (voir feuille annexe).

   b. Soit $\mathrm{G_2}$ le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1) ; (B,\ 1) ; (D,\ 2)\}$.
   Démontrez que $\mathrm{G_2}$ est le milieu du segment [ID]. Placez $\mathrm{G_2}$.

   c. Démontrez que $\mathrm{IG_1DJ}$ est un parallélogramme.
   En déduire la position de $\mathrm{G_2}$ par rapport aux points $\mathrm{G_1}$ et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1) ; (B,\ 1) ; (C,\ m-2) ; (D,\ m)\}$.

   a. Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.

   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

   b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

   c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

   d. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.
   b. Déterminez les images de R et de P par r.
   c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.
3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.
   b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
   c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

Annexe : exercice 4