Baccalauréat S Pondichéry 1^{er} avril 2004

Exercice 1 **3 points**

1. Soit u la suite définie par : $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n

   a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

   b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

   $$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

   Exprimer $S_n$en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **4 points**

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1. »
B : « Le dé amène un multiple de trois. »
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »
N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

   a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

   b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

   c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 3 **8 points**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. **a.** Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, qui sera notée α.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille annexe page 5 sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.
Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et admettent en ce point la même tangente.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.

b. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. **a.** Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(x^2+x+1\right)$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto f(x) - g(x)$.

b. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.

Exercice 4 : enseignement obligatoire **5 points**

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $\left(z'\right)^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+\text{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-\text{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O′ l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B′ l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes des points O′ et B′ et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment [OB].
   a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO′B′ ?
   b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{O}'\text{B}'}$ est égale à $3\sqrt{3}-\text{i}$.
   c. La conjecture émise à la **question a.** est-elle vraie ?.

Exercice 4 : exercice de spécialité **5 points**

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x=0$ rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.
2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).
   a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2+y^2=z^2$.
   b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
   c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.
3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x=1$.
Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.
4. Soit $M(x, y, z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

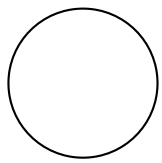

Figure 1

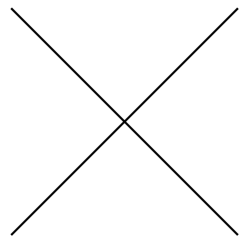

Figure 2

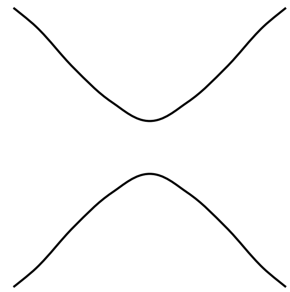

Figure 3

Exercice 3