Baccalauréat S Polynésie spécialité septembre 2003

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit s un nombre réel. On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5+3s \\ y & = & 1+2s \\ z & = & -2s \end{array}\right.$$

1. **a.** Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

   b. Démontrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.

2. **a.** Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-2\,;\,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

   b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$ est indépendante de M.

   c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan $(x\text{O}y)$.

3. La sphère $\mathcal{S}$ est tangente à $\mathcal{P}$ au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de $\mathcal{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathcal{P}$, du même côté que O.
   Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4. **a.** Soient a, b et c trois entiers naturels.
   Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

   b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1,\ p_2, \dots,\ p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Étudier la dérivabilité de f en 0.

   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=1$.
2. On considère la fonction $g\ :\ x \mapsto f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Étudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$

   b. Étudier le sens de variations de g.
   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. n est un entier naturel non nul.
   Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathscr{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ et les deux droites d'équation $x=\dfrac{1}{n}$ et $x=1$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.