Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\dfrac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. **a.** Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

   b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements.

   Préciser l'espérance mathématique $\text{E}(X)$

   Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

   c. Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

   Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

   On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

   Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$.

   Préciser l'espérance mathématique de S.

2. **a.** Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

   Quelle est a probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

   b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

   c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

   $$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \begin{pmatrix} k \\ 13 \end{pmatrix} \left(\frac{7}{8}\right)^{k} \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\text{P}_{13}.$$

   Calculer ce gain.

   d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et M un point quelconque de ce cercle $\mathscr{C}$.

1. Le point D est défini par $\overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{IB}} + \overrightarrow{\text{I}M} = \overrightarrow{\text{I}D}$.

a. Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{\text{A}D} \cdot \overrightarrow{\text{B}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}D} \cdot \overrightarrow{\text{A}M}$ sont nuls.
En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

b. Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{\text{I}D}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{I}G}$.

2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère otthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne les points A, B, I d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$, $z_{\text{B}} = 4 + 2\text{i}$ et $z_{\text{I}} = 4$. On nomme f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = \dfrac{1}{3}z + 2 + \dfrac{2}{3}\text{i}$.

a. Montrer qu'il existe un unique point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$ et calculer l'affixe ω de ce point.
Pour tout point d'affixe z, exprimer alors $Z - \omega$ en fonction de $z - \omega$.
Préciser la nature de l'application f.

b. M étant un point quelconque d'affixe z_M, montrer que l'image par l'application f du point M est l'isobarycentre G d'affixe z_G des points A, B, M.

c. Déterminer l'ensemble des points G lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.

d. En déduire alors, à l'aide du résultat de la question 1. b., l'ensemble décrit par le point D défini par $\overrightarrow{\text{I}D} = \overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{IB}} + \overrightarrow{\text{I}M}$ lorsque le point M parcourt le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.

EXERCICE 2 — 4 points

Enseignement de spécialité

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation
$14u + 39v = 1\ 129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation
$14x + 39y = 1$.

Vérifier que le couple $(-25\ ;\ 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\ 129$.

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u\ ;\ v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. **a.** Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où} \quad u \quad \text{et} \quad v \quad \text{sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Étude préliminaire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^x - 1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
   En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.
5. Montrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

Partie B - Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$ et calcul intégral

1. Montrer que $\mathrm{e}^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie A s'annule.
5. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x.$$

Partie C - Étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $\mathrm{I} = [-2~;~0]$ est incluse dans cet intervalle.
2. **a.** Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{array}\right.$$

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $\mathrm{I} = [-2~;~0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 0 \\ v_{n+1} & = & g\left(v_n\right) \end{array}\right.$$

Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.

Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2~;~0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

Préciser le sens de variation de la suite (v_n).

3. **a.** Soit m la fonction définie sur $[0~;+\infty[$ par :

$$m(x) = x - \ln(1+x).$$

Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$.

En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2~;~0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2 - v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(v_n - u_n\right).$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n,

$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(v_0 - u_0\right).$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

4. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}.