Épreuve de spécialité de Mathématiques - Durée : 3h00

$\mathbb{E}$xercice 1 : 6 points

Le but de cet exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, que pour tout nombre entier naturel n, le nombre $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

Première partie :

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel n est congru, modulo 6, à 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

2. Recopier et compléter le tableau suivant avec des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 5.

$n \equiv \ldots \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \equiv \ldots \pmod 6$						
$5n \equiv \ldots \pmod 6$						
$n^3 + 5n \equiv \ldots \pmod 6$						

3. En déduire que pour tout nombre entier naturel n, le nombre $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

Deuxième partie :

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $n(n+1)$ est pair.
En déduire que pour tout nombre entier naturel n, $3n(n+1)$ est divisible par 6.

2. On admet que

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$$

Montrer que si pour un nombre entier naturel n, n^3+5n est divisible par 6, alors $(n+1)^3+5(n+1)$ est divisible par 6.

3. Que reste-t-il à vérifier, pour en déduire que $n^3 + 5n$ est divisible par 6, pour tout nombre entier naturel n ?

$\mathbb{E}$xercice 2 : 4 points

Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant le choix effectué.

Chaque question posée est notée sur un point, avec la règle suivante : une réponse non justifiée ne rapporte aucun point, une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. L'équation $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{4}{3}$ a une solution dans $\mathbb{R}$.

3. La suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout nombre réel x, on a $1,01^x < 1000000$.

$\mathbb{E}$xercice 3 : 5 points

Le tableau suivant donne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Une urne A contient 50 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 50.
Une deuxième urne B contient 50 boules indiscernables au toucher, numérotées de 51 à 100.

Un jeu consiste à lancer un dé cubique non pipé portant deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 2, puis à tirer au hasard une boule avec la règle suivante :
- si la face obtenue porte le numéro 1, on choisit la boule dans l'urne A ;
- si la face obtenue porte le numéro 2, on choisit la boule dans l'urne B.

Dans la suite,
on note A l'événement "la boule provient de l'urne A ;
on note B l'événement "la boule provient de l'urne B ;
et on note R l'événement "le nombre écrit sur la boule choisie est un nombre premier."

On donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

On joue à ce jeu.

1. Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne A ?
Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne B ?

2. Justifier que la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne A est 0,3.
Quelle est la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne B ?

3. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule portant un nombre premier en jouant à ce jeu est $P(R) = \dfrac{7}{30}$.

Pour répondre à cette question, on pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

4. Léo joue une partie et obtient une boule portant un nombre premier.
Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne A ?

$\mathbb{E}$xercice 4 : 5 points

La feuille **annexe 1** présente le dessin en perspective parallèle d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête l, sur lequel est posé un deuxième cube $IJKHPQRS$ d'arête $\frac{l}{2}$.

Le but de cet exercice est de représenter ces cubes en perspective centrale sur l'**annexe 2**, sachant que la face $ABFE$ est dans un plan **frontal**.
Dans tout l'exercice, on notera a, b, c ... les images des points A, B, C ... dans cette perspective centrale.
On veillera à laisser les traits de construction.
Le barème tiendra compte du soin et de la précision apportés à la construction.

1. a) Construire $abfe$.
   b) Énoncer une propriété de la perspective centrale qui a permis de construire $abfe$.

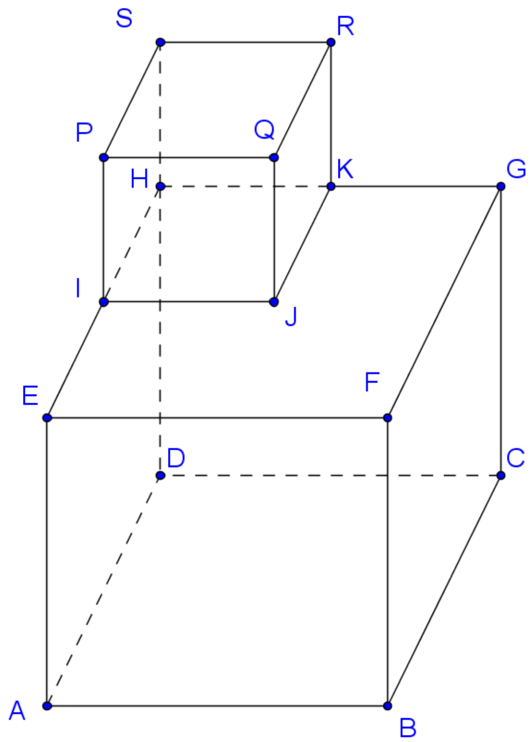
2. Constuire le point de fuite principal w.

3. Terminer la construction de $abcdefgh$.

4. Indiquer, sans justifier, ce que représente le point J pour la face $EFGH$.
En déduire la construction de j.

5. Terminer la construction de $ijkhpqrs$.

Annexe 1 de l'exercice 4



Annexe 2 de l'exercice 4

À RENDRE AVEC LA COPIE