

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars

2007
(spécialité)

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Question de cours

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

2. a. Considérons par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ces vec-

teurs ne sont manifestement pas colinéaires. Les trois points distincts A, B et C définissent un plan \mathcal{P} .

b. $A \in \mathcal{P} \iff 2 \times 1 - 2 + (-3) + 3 = 0$: Vrai.

$B \in \mathcal{P} \iff 2 \times (-3) - 1 + 4 + 3 = 0$: Vrai.

$C \in \mathcal{P} \iff 2 \times 2 - 6 + (-1) + 3 = 0$: Vrai.

L'équation du plan (ABC) est bien :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 2x - y + z + 3 = 0.$$

- c. $I(-5; 9; 4)$. On a vu à la question de cours que les coordonnées d'un

vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est un

vecteur directeur de la droite \mathcal{D} . En traduisant l'égalité vectorielle

$\overrightarrow{IM} = \alpha \vec{u}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} x - (-5) = 2\alpha \\ y - 9 = -\alpha \\ z - 4 = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 + 2\alpha \\ y = 9 - \alpha \\ z = 4 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- d. Les coordonnées du point J, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABC) vérifient le système précédent et l'équation du plan (ABC). On a donc :

$$\begin{cases} x = -5 + 2\alpha \\ y = 9 - \alpha \\ z = 4 + \alpha \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(-5 + 2\alpha) - (9 - \alpha) + 4 + \alpha + 3 = 0$$

$$\iff 6\alpha - 12 = 0 \iff \alpha = 2.$$

Les coordonnées du point J sont donc $(-1; 7; 6)$.

- e. La distance du point I au plan (ABC) est IJ puisque \mathcal{D} est perpendiculaire au plan (ABC). Or $IJ^2 = (-1 + 5)^2 + (7 - 9)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 4 + 4 = 24$. Donc $IJ = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$$\text{On peut vérifier que } d(I, \mathcal{P}) = \frac{|2 \times (-5) - 9 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}.$$

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

A. Question 1 La probabilité de tirer trois boules noires est : $\left(\frac{4}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Question 2 : On a $p_{XXX}(RRR) = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{4}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^3} = \frac{1}{27 + 64 + 1} = \frac{1}{92}$.

B. Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0; 1]$ si

$$\int_0^1 (x+m) dx = \left[\frac{(x+m)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{(1+m)^2}{2} - \frac{m^2}{2} = 1 \iff 2m+1 = 2 \iff 2m = 1 \iff m = \frac{1}{2}.$$

C. Question 4 : On a $\int_5^{+\infty} 0,2e^{-0,2x} dx = [-e^{-0,2x}]_5^{+\infty} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

EXERCICE 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Si $a = 0$, $an + b = b$, donc toutes les lettres seront codées par la même lettre correspondant au reste de la division de b par 26.
2. Si $a = 13$.
A correspond à 0, donc $an + b = b$. A est codée par la lettre qui correspond au reste de la division de b par 26.
C correspond à 2, donc $an + b = 26 \times 2 + b \equiv b \pmod{26}$. Donc C est codé de la même façon que A.
3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
 - a. Si : $\begin{cases} 5n+2 \equiv r \pmod{26} \\ 5p+2 \equiv r \pmod{26} \end{cases}$, alors par différence $5(n-p) \equiv 0 \pmod{26} \Rightarrow n-p \equiv 0 \pmod{26}$ (car 5 est premier avec 26), donc finalement $n \equiv p \pmod{26}$. Or m et p sont inférieurs à 26. Conclusion $n = p$.
 - b. On a la suite :
A \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow C
M \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow K
I \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow Q.
AMI est codé « CKQ ».
4.
 - a. D'après le tableau E correspond à 4. Donc la lettre codée E correspond à un nombre n tel que $5n + 2 \equiv 4 \pmod{26} \iff 5n - 2 \equiv 0 \pmod{26} \iff 5n - 2 = 26y$, avec $y \in \mathbb{Z} \iff 5n - 2 = 26y$, $y \in \mathbb{Z}$.
 - b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
 - i. Solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$. On a $26 = 5 \times 5 + 1 \iff 26 \times 1 - 5 \times 5 = 1 \iff 2 \times 26 - 10 \times 5 = 2 \iff 5 \times (-10) - 26 \times (-2) = 2$. On a donc une solution : le couple $(-10; -2)$.
 - ii. On a le système :
 $\begin{cases} 5x - 26y = 2 \\ 5 \times (-10) - 26 \times (-2) = 2 \end{cases}$, d'où par différence :
 $5(x+10) - 26(y+2) = 0 \iff 5(x+10) = 26(y+2)$. 5 et 26 étant premiers entre eux, il en résulte d'après le théorème de Gauss qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x+10 = 26k$, d'où en substituant dans la dernière égalité : $y+2 = 5k$. On obtient donc : les couples solutions sont les couples $(x; y)$ tels que $\begin{cases} x = 26k - 10 \\ y = 5k - 2 \end{cases}$
 - iii. $0 \leq x \leq 25 \iff 0 \leq 26k - 10 \leq 25 \iff 10 \leq 26k \leq 35 \Rightarrow k = 1$.
Finalement $x = 16$ et $y = 3$. Le seul couple solution est $(16; 3)$.

c. La lettre codée E correspond à $x = n = 16$. D'après le tableau c'est Q.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

A. 1. $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \dots = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

A. 2. $n \in \mathbb{N}^*$ donc $-3n-2 < 0$ et $n(2n+2)(2n+1) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

A. 3. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} > 0$: la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente par théorème.

B. 1. a. Soit n dans \mathbb{N}^* : $0 < n \leq x \leq n+1$ donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$. Les fonctions sont continues sur $[n; n+1]$ et $n \leq n+1$ donc par croissance de l'intégrale, $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$ d'où $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$.

B. 1. b. $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
 $\frac{1}{n} - f(n) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

On a donc bien l'égalité : $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

B. 1. c. Par suite, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - f(n) \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq -f(n) \leq 0$ donc en multipliant par -1 , on obtient $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc finalement $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

B. 2. a. On écrit l'égalité $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$ pour $k = n; k = n+1; \dots; k = 2n$:

$$\begin{array}{rcc} 0 & \leq & f(n) & \leq & \frac{1}{n(n+1)} \\ 0 & \leq & f(n+1) & \leq & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \leq & \dots & \leq & \dots \\ 0 & \leq & f(2n) & \leq & \frac{1}{2n(2n+1)} \end{array}$$

En sommant, on obtient $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$ et donc $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$.

B. 2. b. Soit x dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. On a $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$.

Pour que $\frac{1}{x(x+1)}$ soit égale à $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$, il suffit de prendre a et b de sorte que $a+b=0$ et $a=1$, d'où $a=1$ et $b=-1$. Finalement, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

B. 2. c. On écrit l'égalité $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour $x = n; x = n+1; \dots; x = 2n$:

$$\begin{array}{rcc} \frac{1}{n(n+1)} & = & \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} & = & \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ \dots & = & \dots \\ \frac{1}{2n(2n+1)} & = & \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \end{array}$$

Par télescopage, on obtient $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

B. 2. d. Par suite, on a $0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq S_n$ avec $\lim 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n^2} =$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

d'après la règle opératoire. Le théorème des gendarmes s'applique et on peut

conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$.

B. 2. e. On écrit l'égalité $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ pour $x = n$; $x = n+1$; ...; $x = 2n$:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ f(n+1) &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\ &\dots \\ f(2n) &= \frac{1}{2n} + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n} + \ln(2n) - \ln(2n+1) \end{aligned}$$

Par télescopage : $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n + \ln(n) - \ln(2n+1) = u_n - (\ln(2n+1) - \ln(n))$ et

finalement on a bien $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

B. 2. f. On en déduit $u_n = \sum_{k=n}^{2n} f(k) + \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$ et $\lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \ln(2)$ par continuité de \ln en 2 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$.