Correction

$\mathbb{E}$xercice 1 :

Commun à tous les candidats **4 points**

1. a) La probabilité de tirer trois boules noires est :

$$p = P(NNN) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56}.$$

Réponse A.

b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

$$p' = P(RRR) + P(NNN) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{56} = \frac{11}{56}.$$

Réponse A.

2. X étant la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires tirées. Il s'agit d'une loi binomiâle de paramètres $n = 5$ et $\alpha = \frac{3}{8}$.

a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

$$P(X = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)^5.$$

Réponse B.

b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules blanches est :

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2.$$

Réponse C.

3. a) La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est : $\frac{4}{7}$.

Réponse B.

b) La probabilité de l'événement $R_1 \cap N_2$ est :

$$P(R_1 \cap N_2) = P_{R_1}(R_2) \times P(R_1) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}.$$

Réponse C.

c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{8}.$$

Réponse A.

d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule
noire au second tirage est :

$$P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{\frac{15}{56}}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{5}{7}.$$

Réponse C.

$\mathbb{E}$xercice 2 :

RÉSERVÉ AUX CANDIDATS N'AYANT PAS CHOISI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 points**

I. Restitution organisée de connaissances.

On pose $z = x + iy$.
1. $\overline{z} = -z \iff x - iy = -(x + iy) \iff 2x = 0 \iff x = 0 \iff z$ est un imaginaire pur.

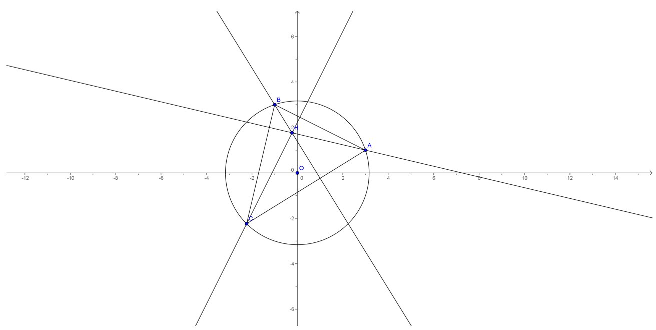
2. $\overline{z} = z \iff x - iy = x + iy \iff 2iy = 0 \iff y = 0 \iff z$ est un réel pur.

3. $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y2 = |z|^2$.

II. Etude d'un cas particulier.

1. $OA = |a| = \sqrt{10}$, $OB = |b| = \sqrt{10}$ et $OC = |c| = \sqrt{10}$.
Ainsi O est le centre du cercle (de rayon $\sqrt{10}$) circonscrit au triangle ABC.

2. H a pour affixe $h = a + b + c = 2 - \sqrt{5} + i(4 - \sqrt{5})$.
On vérifie sur le graphique ci-dessous que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.



III. Etude du cas général.

1.O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si $OA^2 = OB^2 = OC^2$ ce qui revient d'après le I.3. à $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$.

2. a) On dispose de $w = \overline{b}c - b\overline{c}$, ainsi $\overline{w} = b\overline{c} - \overline{b}c = -w$.
Donc, d'après le I.1, w est un imaginaire pur.

b) $(b + c)(\overline{b} - \overline{c}) = \overline{b}c - b\overline{c} + (b\overline{b} - c\overline{c}) = w$ car $b\overline{b} = c\overline{c}$.

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{(b-c)(\overline{b}-\overline{c})} = \frac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{(b-c)\overline{(b-c)}} = \frac{w}{|b-c|^2}.$$

c) $|b-c|^2$ est un réel et d'après le a), w est un imaginaire pur, donc $\dfrac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur.

3. a) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AH}$ est $(a + b + c) - a = b + c$, et celle du vecteur $\overrightarrow{CB}$ est $b - c$.

b) $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = Arg\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, car d'après le 2.c), $\dfrac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur.

c) D'après la réponse précédente, $(AH) \perp (BC)$ donc (AH) est a hauteur issue de A dans le triangle ABC, et puisqu'on admet que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est que (BH) est la hauteur issue de B dans le triange ABC. Ainsi, H est l'orthocentre de ce triangle.

$\mathbb{E}$xercice 2 :

RÉSERVÉ AUX CANDIDATS AYANT CHOISI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 points**

I. Restitution organisée de connaissances.

$(a \neq 1)$. L'affixe ω du centre de cette similitude vérifie : $\omega = a\omega + b$ c'est à dire $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

II. Première décomposition de f.

1. D'après le I, l'affixe ω du centre Ω de la similitude directe g est $\omega = \dfrac{2i\sqrt{2}-2}{1-i\sqrt{2}} = -2$;

le rapport est $k = |a| = |i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$;
l'angle $\theta = Arg(a) = Arg(i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

2. La réflexion s d'axe (Ox) a pour expression $z' = \overline{z}$.
On vérifie aisément que pour tout nombre complexe z, $g \circ s(z) = g(\overline{z}) = f(z)$.

III. Deuxième décomposition de f.

1. On pose ω', l' (ou les) affixe(s) du (ou des) point(s) fixe(s) de f. $\omega' = x' + iy'$.
ω' vérifie

$$\omega' = i\sqrt{2}\,\overline{\omega'} + 2i\sqrt{2} - 2$$

en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système :

$$\begin{cases} x' - \sqrt{2}y' + 2 = 0 \\ \sqrt{2}x' - y' + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, x' et y' étant déterminés de façon unique, ω' est unique.
La résolution du système précédent donne : $x' = -2$ et $y' = 0$, ainsi $\omega' = -2 = \omega$.

2. Un point $N(x;y)$ de $\mathcal{D}$ a pour affixe $z = x + iy$ avec $y = x + 2$ et dans ce cas, le point $f(N)$ a alors pour affixe $z' = x' + iy' = i\sqrt{2}\,\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2 = i\sqrt{2}\,\overline{(x+iy)} + 2i\sqrt{2} - 2 = (\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2} - 2) + i(\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2})$.

Ainsi, $N \in \mathcal{D} \iff y = x + 2 \iff y' = x' + 2 \iff f(N) \in \mathcal{D}$.

3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$, d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$.

a) Les points $A(-2)$ et $B(2i)$ sont situés sur $\mathcal{D}$ donc sont invariants par σ. Ainsi,

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 2i = -2ia + b \end{cases}$$

Ce qui donne $a = i$ et $b = -2 + 2i$. Finalement, $\sigma : z \mapsto z' = i\overline{z} - 2 + 2i$.

b) Puisque par hypothèse, $k = f \circ \sigma$,
pour tout nombre complexe z,

$$k(z) = f \circ \sigma(z) = f(i\overline{z} - 2 + 2i) = i\sqrt{2}\,(\overline{i\overline{z} - 2 + 2i}) + 2i\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2.$$

c) Puisque $\sqrt{2}$ est un nombre réel, différent de 1, k est une homthétie de rapport $\sqrt{2}$;
son centre vérifie, $\omega'' = \sqrt{2}\,\omega'' + 2\sqrt{2} - 2$, ce qui donne $\omega'' = -2 = \omega$.

4. $k = f \circ \sigma$ donne $k \circ \sigma^{-1} = f \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = f$, or $\sigma^{-1} = \sigma$, donc $f = k \circ \sigma$.
Finalement, f s'écrit comme la composée de la réflexion σ et de l'homothétie k (qui ont même centre Ω).

Exercice 3 :

Commun à tous les candidats **4 points**

I. Question préliminaire.

1. T coupe l'axe des abscisses au point H d'ordonnée nulle, ainsi :
$0 = f'(x)[X_T - x] + f(x) \iff 0 = f'(x).X_T - x.f'(x) + f(x)$
$\iff f'(x).X_T = x.f'(x) - f(x) \iff X_T = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}.$

2. T coupe l'axe des ordonnées au point K d'abscisse nulle, ainsi :
$Y_T = f'(x)[0 - x] + f(x) \iff Y_T = f(x) - x.f'(x).$

II.

1. On pose $y = f(x)$ pour tout x réel.
f vérifie la propriété 1, si et seulement si, y vérifie la propriété 1 $\iff X_T - x = -\dfrac{y}{y'}$
$\iff k = \dfrac{y}{y'} \iff y' = \dfrac{1}{k}y.$

2. Les fonctions qui vérifient l'équation différentielle :

$$y' = \frac{1}{k}y \quad \text{s'écrivent}$$

pour tout x réel, $f(x) = A.e^{\frac{1}{k}x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Pour $k = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 1$, on trouve $A = 1$, ainsi il s'agit de la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par l'expression : $f(x) = e^{2x}$.

III.

1. On pose $y = f(x)$ pour tout $x > 0$.
f vérifie la propriété 2, si et seulement si, y vérifie la propriété 2
$\iff Y_T - f(x) = -x.f'(x) \iff Y_T - y = -x.y' \iff y' = \dfrac{y - Y_T}{x} \iff y' = \dfrac{k}{x}.$

2. Les fonctions qui vérifient l'équation différentielle :

$$y' = \frac{k}{x} \quad \text{s'écrivent}$$

pour tout $x > 0$, $f(x) = k.ln(x) + B$ avec $B \in \mathbb{R}$.

Pour $k = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 0$, on trouve $B = 0$, ainsi il s'agit de la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par l'expression : $f(x) = \frac{1}{2}.ln(x)$.

$\mathbb{E}$xercice 4 :

Commun à tous les candidats **7 points**

I. Existence et unicité de la solution.

1. x est solution de l'équation (E) si et seulement si
   $e^x = \frac{1}{x} \iff e^{-x} = x \iff x - e^{-x} = 0 \iff f(x) = 0$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^{-x}$, qui est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b) f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable ;
   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
   d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur réelle α solution de l'équation $f(x) = 0$, c'est à dire que, d'après le I.1, l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

   c) $f(\frac{1}{2}) \approx -0,11 < 0$ et $f(1) \approx 0,63 > 0$, donc $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$.

   d) Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(\alpha) = 0$, on en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[0; \alpha]$.

II. Deuxième approche.

1. $g(x) = x \iff \dfrac{1+x}{1+e^x} = x \iff 1 + x = x.(1 + e^x) \iff 1 = x.e^x \iff e^{-x} = x \iff f(x) = 0$.

2. α est l'unique réel vérifiant $f(\alpha) = 0$ donc l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$, d'après la réponse précédente.

3. g est dérivable sur $[0; 1]$, pour tout x de cet intervalle,
$$g'(x) = \frac{(1+e^x) - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}.$$
   Pour tout $x \in [0; \alpha]$, $(1 + e^x)^2 > 0$ et $1 - xe^x = e^x.f(x)$ qui est positif sur cet intervalle d'après le 1.2.d), donc $g'(x) \geq 0$,
   ainsi la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α.

1. On vérifie la propriété au rang initial : $u_0 = 0$, $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$ et $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$, ainsi, on a bien
$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha.$$

On suppose que la propriété est vraie à un rang n fixé, c'est à dire que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

On la démontre au rang suivant :
on a supposé que :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

on compose à l'aide de la fonction g qui est croissante sur $[0; \alpha]$:

$$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$$

sachant que $g(0) = \frac{1}{2}, g(u_n) = u_{n+1}, g(u_{n+1}) = u_{n+2}, g(\alpha) = \alpha$,

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha.$$

ainsi, la prorpiété est vérifiée au rang $n + 1$.

Finalement, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2. La suite u est croissante puisque pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$;
elle est majorée puisque pour tout entier naturel n : $u_n \leq \alpha$. Donc elle converge.
On note l sa limite.

3. La suite u est définie par récurrence à l'aide de la fonction g. Cette fonction est continue sur $[0; \alpha]$, et u est convergente, d'après le cours, on a alors : $g(l) = l$.
α étant l'unique réel vérifiant $g(\alpha) =$, c'est que $= \alpha$.

4. À l'aide de la calculatrice, $u_4 \approx 0,567143$.