

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Polynésie
septembre 2006

EXERCICE 1

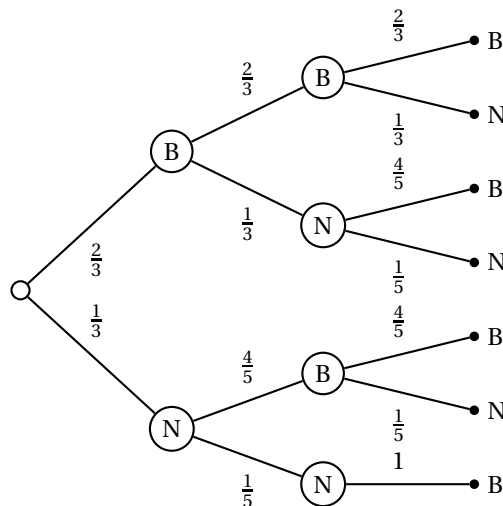
4 points

1. a. On a $c - a = 2 + 2i$ et $b - a = 2 - 2i$; or $c - a = 2 + 2i = i(2 - 2i) = i(b - a)$. Cette égalité signifie que C est l'image de B dans le quart de tour direct de centre A. Donc le triangle ABC est rectangle en A.
- b. On a $\frac{z-3}{z-5+2i} = \frac{z-z_A}{z-z_B}$. Donc $\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$
- c. Le nombre $\frac{z-3}{z-5+2i}$ est un réel strictement négatif si et seulement si l'un des ses arguments est égal à π . D'après le b, on a donc $\frac{z-3}{z-5+2i} \in \mathbb{R}^- \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \pi \pmod{2\pi} \iff M \in]AB[$. L'ensemble cherché est donc le segment ouvert $]AB[$.
2. a. Si z' est l'affixe du point image du point d'affixe z dans la rotation r de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, cette affixe vérifie $z' - \omega = -i(z - \omega) \iff z' = -iz + \omega(1+i) \iff z' = -iz + (2-i)(1+i) \iff z' = -iz + 3 + i$.
- b. ABC étant rectangle isocèle en A, le centre E du cercle circonscrit Γ est le milieu de $[BC]$ d'affixe 5 et son rayon est égal à 2. Une rotation est une isométrie donc l'image du cercle Γ est le cercle Γ' dont le centre est E' , image de E par r et de même rayon 2. On a alors : $z_{E'} = z'_E = -iz_E + 3 + i = -5i + 3 + i = 3 - 4i$. Une équation paramétrique de Γ' est alors : $z - z_{E'} = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0 ; 2\pi[$ donc : $z = 3 - 4i + 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0 ; 2\pi[$.

EXERCICE 2

4 points

1. a. On dresse l'arbre pondéré suivant :



Les valeurs prises par X sont (de haut en bas) : 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2.

b. On a $P(X = 0) = P(BBB) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

c. – La probabilité demandée s’obtient en suivant la troisième branche.

Elle est égale à $P(BNB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$.

– On a de même $P(NBB) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{75}$.

$P(BBN) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Finalement $P(X = 1) = P(BBB) + P(BNB) + P(BBN) = \frac{8}{45} + \frac{16}{75} + \frac{4}{27} = \frac{120 + 144 + 100}{27 \times 25} = \frac{364}{675}$.

2. – $P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$.

– $P_A(B)$. On sait donc que l’on a tiré une noire au k -ième tirage. Il reste donc 4 blanches et une noire. On tire $(n - k)$ boules blanches avec une probabilité

de $P_A(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$.

– Si seule la k -ième boule tirée est noire c’est que $N = A \cap B$.

On a donc $p(N) = p(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \times \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{2^{2n-k-1}}{3^k \times 5^{n-k}}$.

EXERCICE 3

7 points

1. a. En écrivant $f(x) = 2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x}$ les deux termes de la somme ont pour limite moins l’infini, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

De la même façon en plus l’infini, les deux termes ont pour limite 0 (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ (croissances comparées)), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

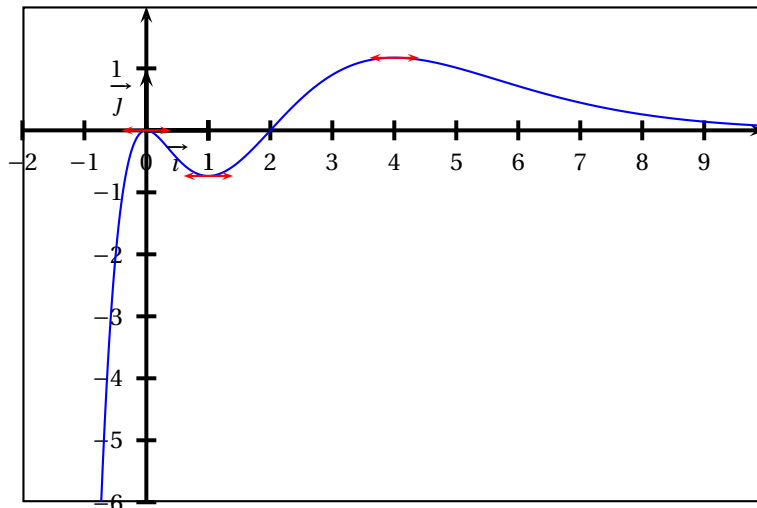
b. La dérivée de la fonction f est donnée par

$f'(x) = e^{-x}(6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2) = e^{-x}(-2x^3 + 10x^2 - 8x) = 2xe^{-x}(-x^2 + 5x - 4)$.

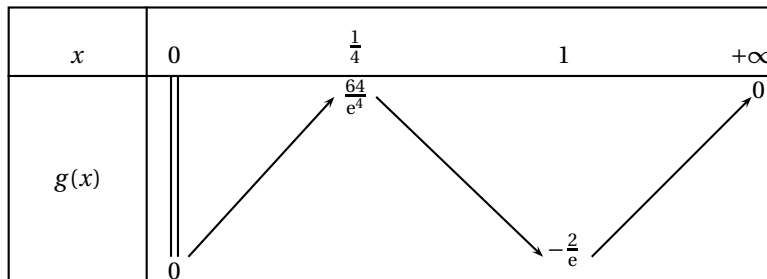
c. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, le signe de la dérivée est celui de $x(-x^2 + 5x - 4)$. Le trinôme a pour racines 1 et 4, donc le signe de la dérivée dépend de la position de x par rapport aux nombres 0, 1 et 4. D’où le tableau de variations :

| | | | | | | | |
|---------|-----------|---|----------------|------------------|-----------|---|---|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | 4 | $+\infty$ | | |
| x | - | 0 | + | + | + | | |
| trinôme | + | + | 0 | - | 0 | + | |
| f' | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 0 | $-\frac{2}{e}$ | $\frac{64}{e^4}$ | 0 | | |

d. Courbe représentative (\mathcal{C}) :



2. a. $I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$.
- Avec $\begin{cases} u(x) = x & dv(x) = e^{-x} \\ du(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ on obtient en intégrant par parties, toutes les fonctions étant dérivables et leurs dérivées continues, $I_1 = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$.
- b. L'égalité $I_n = n I_{n-1} - \frac{1}{e}$ donne pour $n = 2$, $I_2 = 2I_1 - \frac{2}{e} = 2 - \frac{5}{e}$.
 Pour $n = 3$, $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) - \frac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}$.
- c. L'aire du domaine défini est égal (en unités d'aire) à la valeur absolue de l'intégrale $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2) e^{-x} dx = 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 4 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2I_3 - 4I_2$ (par linéarité de l'intégrale).
 On a donc $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2) e^{-x} dx = 2\left(6 - \frac{16}{e}\right) - 4\left(2 - \frac{5}{e}\right) = 4 - \frac{12}{e}$.
 Conclusion $\mathcal{A} = \frac{12}{e} - 4 \approx 4,4$.
 Effectivement sur la figure, sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction est négative et l'aire vaut moins de $\frac{1}{2}$ carreau (cm^2).
3. a. Pour tout x de $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$, on définit $v(x)$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$. v est la composée de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, décroissante sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$ et à valeurs dans $[a; b]$ et de la fonction u , supposée croissante sur $[a; b]$. Par composition, on obtient une fonction décroissante sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.
- b. On a donc $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.
 En posant $\frac{1}{x} = \alpha$, $g(\alpha) = (2\alpha^3 - 4\alpha^2) e^{-\alpha}$. On obtient alors facilement $\lim_{\alpha \rightarrow 0} g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.
- c. De même qu'au 2 a, on démontrerait que si u est décroissante, alors v est croissante. Le tableau de variations de g se déduit donc de celui de f après avoir remarqué que si $1 < 4$, alors $\frac{1}{4} < 1$. Les intervalles de variations sont donc $\left]0; \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ et $[1; +\infty[$: d'où le tableau :



EXERCICE 4

5 points

1. Un vecteur \vec{n}_1 normal à (P_1) est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur \vec{n}_2 normal à (P_2) est

$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont non nuls et $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 4 = 0$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les deux plans sont perpendiculaires.

2. En posant $z = t$ les coordonnées de la droite commune aux deux plans vérifient $\begin{cases} -2x + y = 6 - t \\ x - 2y = 9 - 4t \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y = 6 - t \\ 2x - 4y = 18 - 8t \end{cases} \Rightarrow -3y = 24 - 9t \iff y = -8 + 3t$ et en reportant dans l'une des équations des plans $x = -7 + 2t$.

Conclusion : $M(x ; y ; z) \in (P_1 \cap P_2) = (D \iff \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$.

3. a. On a $-18 - 4 - 1 - 6 = 0$ Faux et $-9 + 8 - 4 - 9 = 0$ Faux

b. $AM^2 = (x+9)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = (2+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (t+1)^2 = 14t^2 - 14t + 21 = 7(2t^2 - 2t + 3)$.

c. $f(t) = 2t^2 - 2t + 3 = 2 \left(t^2 - t + \frac{3}{2} \right) = 2 \left[\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right] = 2 \left[\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \right] \geq 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} > 0$. Ce trinôme est donc décroissant sur $] -\infty ; \frac{1}{2}]$, croissant sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ et a un minimum en $\frac{1}{2}$.

Le point correspondant est $M_{\text{mini}} = I \left(-6 ; -\frac{13}{2} ; \frac{1}{2} \right)$.

4. a. La représentation paramétrique de (D) donne les coordonnées d'un vecteur directeur de (D), donc un vecteur normal à (Q), c'est le vecteur $\vec{q} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une équation de (Q) est donc : $2x + 3y + z + \alpha = 0$. $A \in (Q) \iff -18 - 12 - 1 + \alpha = 0 \iff \alpha = 31$.

Une équation de (Q) est donc : $M \in (Q) \iff 2x + 3y + z + 31 = 0$.

b. Le triangle AMI est rectangle en I. Le côté [AI] a une longueur inférieure à celle de l'hypoténuse [AM] : I est bien le projeté orthogonal de A sur (D).