

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2006 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2.
 - a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux. Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.
 - b. On désigne par A l'évènement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les 10 ». Calculer les probabilités de A et de B .
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».
 - a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
 - b. Calculer la probabilité de l'évènement T .
 - c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

On considère l'équation (E)

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1.
 - a. Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1 .
 - b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b)$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les trois points A , B et C d'affixes respectives 1, $2 + 2i$ et $1 - i$.

1. Représenter A , B et C .
2. Déterminer le module et un argument de $\frac{2 + 2i}{1 - i}$. En déduire la nature du triangle OBC .

3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.
5. Quelle est la nature de OCDB ?

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . (unité 1 cm).

On construira une figure que l'on complètera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r .
Montrer que B a pour affixe $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant

$$\left\{ -3; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

3.
 - a. Déterminer $r(F)$.
 - b. Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
 - a. Déterminer l'angle et le rapport de s' . En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
 - b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
 - c. Déterminer l'écriture complexe de $s' \circ s$.
5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C.
 - a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par $s' \circ s$.
 - b. Calculer l'affixe du point A' . Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

1.
 - a. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

Étudier le sens de variation de f , et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prendra comme unité 2 cm).

- b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geq \sqrt{2}$.

- b. Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
 - d. Prouver qu'elle converge.
3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

En déduire sa valeur.

EXERCICE 4

6 points

Commun tous les candidats

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points A(0 ; 0 ; 3), B(2 ; 0 ; 4), C(-1 ; 1 ; 2) et D(1 ; -4 ; 0)
- les plans $(P_1) : 7x + 4y - 3z + 9 = 0$ et $(P_2) : x - 2y = 0$.
- les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t' \\ z = 8 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a.	b.	e.	d.
1. Le plan (P_1) est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2. La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de (P_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (P_1)	(Δ_1) est incluse dans (P_1)	(Δ_1) coupe (P_1)	(Δ_1) est orthogonale à (P_1)
4. Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
5. L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite

(D) passant par A(0 ; 0 ; 3) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1 ; 0 ; -1)$ et la droite (D') passant par B(2 ; 0 ; 4) et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(0 ; 1 ; 1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D'), de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D').
 définis par $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v}$, où a et b sont de nombres réels.

Exprimer les coordonnées de M, de M' puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.

2. Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D') si et seulement si le couple $(a; b)$ est solution du système

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$$

3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M' , que nous noterons ici H et H' , tels que la droite (HH') soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D') . Montrer que $HH' = \sqrt{3}$ unités de longueur.
4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D') .
- a. En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

$$MM'^2 = (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3.$$

- b. En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H' .