

**Exercice I :**

1. Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ont pour coordonnées respectives  $(-5 ; -2 ; 4)$  et  $(1 ; 1 ; 1)$ .  
Or il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés, ils forment donc le plan (ABC).
2. (a) La droite (d) admet pour vecteur directeur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(2 ; -3 ; 1)$  (les coefficients de  $t$  dans son équation paramétrique voir son cours).

Or

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-5) + (-3) \times (-2) + 1 \times 4 = -10 + 6 + 4 = 0$$

et

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

Donc la droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), les droites (AB) et (AC), ainsi (d) est perpendiculaire au plan (ABC) et un vecteur normal au plan (ABC) est  $\vec{u}$ .

- (b) Donc (ABC) a pour équation :  $2x - 3y + z + d = 0$ .

Mais comme A appartient à (ABC), on a :  $2 \times 2 - 3 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$ .

Donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$2x - 3y + z - 4 = 0$$

3. Appelons G le barycentre de (A;-2), (B;-1) et (C;2), alors G appartient au plan (ABC) (cf cours).

Montrons que G appartient à la droite (d). Pour cela, calculons les coordonnées de G :

$$x_G = \frac{-2 \times 2 + (-1) \times (-3) + 2 \times 3}{-2 - 1 + 2} = -5$$

$$y_G = \frac{-2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 2 \times 2}{-2 - 1 + 2} = -3$$

$$z_G = \frac{-2 \times 3 + (-1) \times 7 + 2 \times 4}{-2 - 1 + 2} = 5$$

Déterminons, s'il existe un réel  $t$  vérifiant :

$$\begin{cases} -5 = -7 + 2t \\ -3 = -3t \\ 5 = 4 + t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Ainsi G appartient à la droite (d), mais aussi au plan (ABC) donc (comme (d) est perpendiculaire à (ABC) il ne peut y avoir qu'un point d'intersection), le point d'intersection de (ABC) avec (d) est le barycentre de (A;-2), (B;-1) et (C;2), c'est à dire H.

4. Comme  $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow -\overrightarrow{MH} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$ , alors l'ensemble  $\Gamma_1$  des points M de l'espace vérifiant  $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$  est le plan de vecteur normal  $\overrightarrow{BC}$  passant par H.
5. Comme  $\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29} \Leftrightarrow \| -\overrightarrow{MH} \| = \sqrt{29}$ , alors l'ensemble  $\Gamma_2$  des points M de l'espace vérifiant  $\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29}$  est la sphère de centre H et de rayon  $\sqrt{29}$ .
6. Comme la sphère est de centre H et le plan passant par H, alors l'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est le cercle de centre H et de rayon  $\sqrt{29}$ .
7. Comme les vecteurs  $\overrightarrow{SH}$  et  $\overrightarrow{CB}$  ont pour coordonnées respectives  $(3 ; -4 ; 2)$  et  $(-6 ; -3 ; 3)$ , donc

$$\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{CB} = -18 + 12 + 6 = 0$$

Ainsi S appartient à  $\Gamma_1$ .

Et

$$\|\overrightarrow{SH}\| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$

Donc S appartient aussi à  $\Gamma_2$ , donc S appartient à l'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

### Exercice II :

1. (a) Comme  $B_1$  est l'image de B, d'affixe 2, par l'homothétie de centre A, d'affixe i, et de rapport  $\sqrt{2}$ , alors son affixe est :

$$\sqrt{2}(2 - i) + i = 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$$

- (b) Comme B' est l'image de  $B_1$  par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ , alors son affixe est :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{4}}(2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) - i) + i &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + i \\ &= \frac{2}{2}(1 + i)(2 - i) + i \\ &= 3 + 2i \end{aligned}$$

2. (a) L'image de B par la transformation  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe  $z$  associe le point M' d'affixe  $z' = (1 + i)z + 1$  a pour affixe :

$$(1 + i) \times 2 + 1 = 3 + 2i$$

Donc l'image de B est bien B'.

- (b) Un point M d'affixe  $z$  est invariant par  $f$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} z' = z &\Leftrightarrow (1 + i)z + 1 = z \\ &\Leftrightarrow iz = -1 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{i} = i \end{aligned}$$

Donc le point A est le seul point invariant par  $f$ .

- (c) Pour tout nombre complexe distinct de i,

$$\begin{aligned} \frac{z' - z}{i - z} &= \frac{(1 + i)z + 1 - z}{i - z} \\ &= \frac{iz - 1}{i - z} \\ &= \frac{-i(i - z)}{i - z} = -i \end{aligned}$$

Or

$$\frac{MM'}{MA} = \left| \frac{z' - z}{i - z} \right| = |-i| = 1 \Leftrightarrow MM' = MA$$

Donc M' appartient au cercle de centre M et de rayon AM.

De plus,

$$\left( \overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MM'} \right) = \arg \left( \frac{z' - z}{i - z} \right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi M' est le point du cercle de centre M et de rayon AM tel que :  $\left( \overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MM'} \right) = -\frac{\pi}{2}$ .

3. (a) Comme  $|z - 2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow BM = \sqrt{2}$ , alors l'ensemble  $\Sigma_1$  des points M d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - 2| = \sqrt{2}$  est le cercle de centre B et de rayon  $\sqrt{2}$ .

(b) De plus,

$$z' - 3 - 2i = (1 + i)z + 1 - 3 - 2i = (1 + i)z + 1 - 2(1 + i) = (1 + i)(z - 2)$$

D'où :

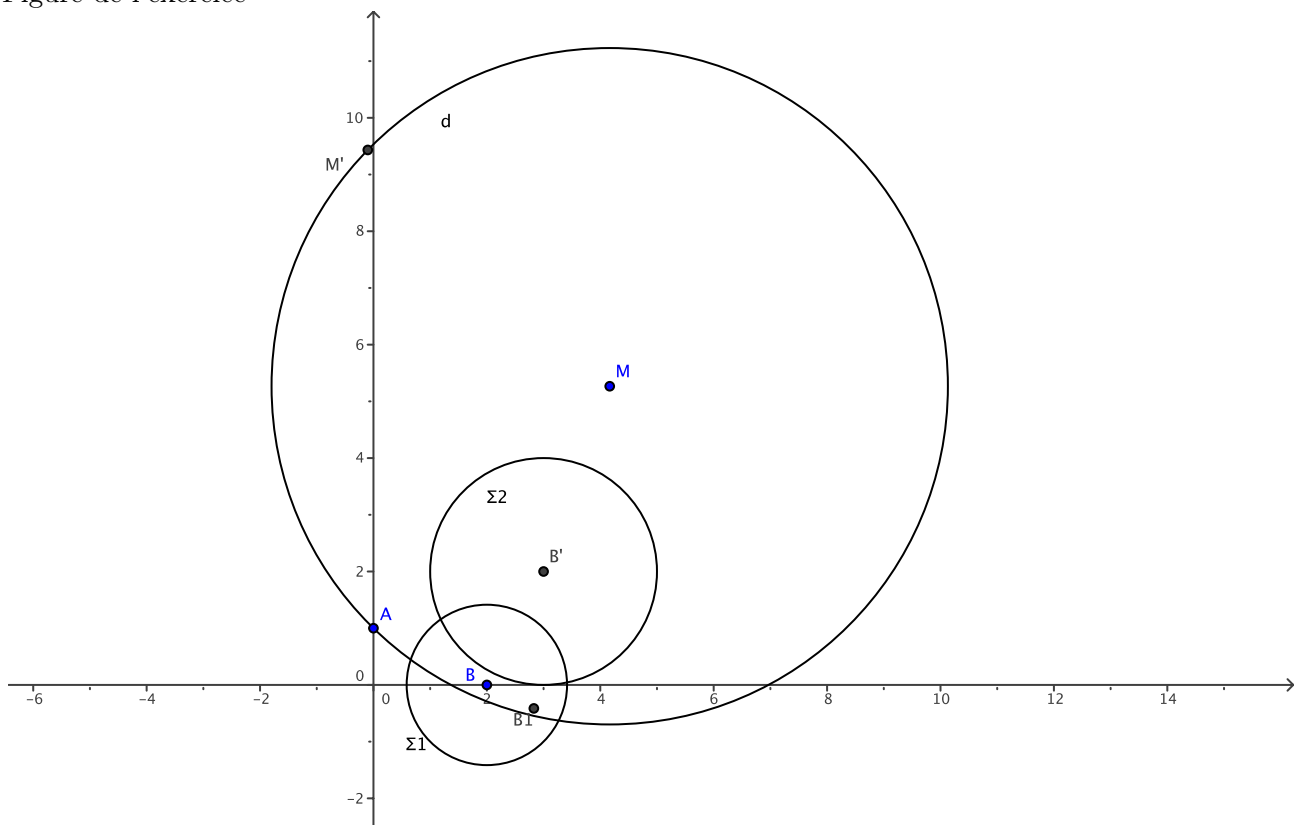
$$|z' - 3 - 2i| = |(1 + i)(z - 2)| = |1 + i||z - 2| = \sqrt{2}|z - 2|$$

Donc si M appartient à  $\Sigma_1$ ,  $|z - 2| = \sqrt{2}$  et

$$|z' - 3 - 2i| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow M'B' = 2$$

Donc si M appartient à  $\Sigma_1$ , alors M' appartient au cercle de centre B' et de rayon 2.

(c) Figure de l'exercice



### Exercice III : Partie A :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln(x + 1)$

1. (a)  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ , et

$$f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1}$$

Mais sur  $[0; +\infty[$ ,  $\ln(x + 1) \geq 0$  et  $\frac{x}{x+1} \geq 0$ , donc  $f'(x) \geq 0$ .

Ainsi  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

(b) Comme  $f'(0) = 0$  et  $f(0) = 0$ , alors la tangente au point d'abscisse 0 est  $y = 0$ , c'est à dire l'axe des abscisses.

2. (a) Déterminons les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $x \neq -1$  :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} &\Leftrightarrow x^2 = (ax + b)(x + 1) + c \\ &\Leftrightarrow x^2 = ax^2 + (a + b)x + b + c \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi pour tout réel  $x \neq -1$  :

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

(b) Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \ln(1+1) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

3. Or sur  $[0; +\infty[$ ,  $x \geq 0$  et  $\ln(x+1) \geq 0$ , alors  $f$  est positive sur  $[0; +\infty[$ , donc l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $y = 0$  est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx$$

Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} u' &= x & u &= \frac{1}{2}x^2 \\ v &= \ln(x+1) & v' &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[ \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{x^2}{x+1} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2}I \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. Comme  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0;1]$  à valeurs dans  $[f(0); f(1)] = [0; \ln 2 \approx 0,6]$ , alors l'équation  $f(x) = 0,25$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0;1]$  de valeur approchée

**Partie B :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ .

1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^{n+1} \ln(x+1) - \int_0^1 x^n \ln(x+1) \right) dx \\ &= \int_0^1 (x^n(x-1) \ln(x+1)) dx \end{aligned}$$

Mais sur  $[0;1]$ ,  $x^n \geq 0$ ,  $x-1 \leq 0$  et  $\ln(x+1) \geq 0$ , donc  $x^n(x-1) \ln(x+1) \leq 0$ .

Donc

$$\int_0^1 (x^n(x-1) \ln(x+1)) dx \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi la suite  $u$  est décroissante, comme de plus,  $u$  est minorée par 0 alors la suite  $u$  converge.

2. Sur  $[0;1]$ ,  $0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$  puisque la fonction  $\ln$  est croissante.  
Donc sur  $[0;1]$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 &\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln 2 \right]_0^1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \ln 2 \end{aligned}$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , donc (théorème des gendarmes),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exercice IV :** La probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant  $t$  est :

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

1.

$$\begin{aligned} p(X > 6) = 0,3 &\Leftrightarrow 1 - p(X \leq 6) = 0,3 \\ &\Leftrightarrow 1 - (1 - e^{-6\lambda}) = 0,3 \\ &\Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,3 \\ &\Leftrightarrow -6\lambda = \ln 0,3 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,3}{6} \end{aligned}$$

2. L'instant  $t$  pour lequel la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois soit de 0,5 vérifie :

$$\begin{aligned} p(X \leq t) = 0,5 &\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -\lambda t = \ln 0,5 \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{\ln 0,5}{\lambda} \approx 3,5 \text{ ans} \end{aligned}$$

3. La probabilité que le robot n'ait pas de panne au cours des deux premières années est :

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-0,4}$$

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans est :

$$p(X \geq 6 / X \geq 2) = p(X \geq 4) = e^{-0,8}$$

5. Dans un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante et donc des durées de vie indépendantes, la probabilité qu'au moins un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est, en passant par l'événement contraire :

$$1 - (1 - e^{-0,4})^{10}$$