

## ✧ Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2006 ✧

### EXERCICE 1

**4 points**

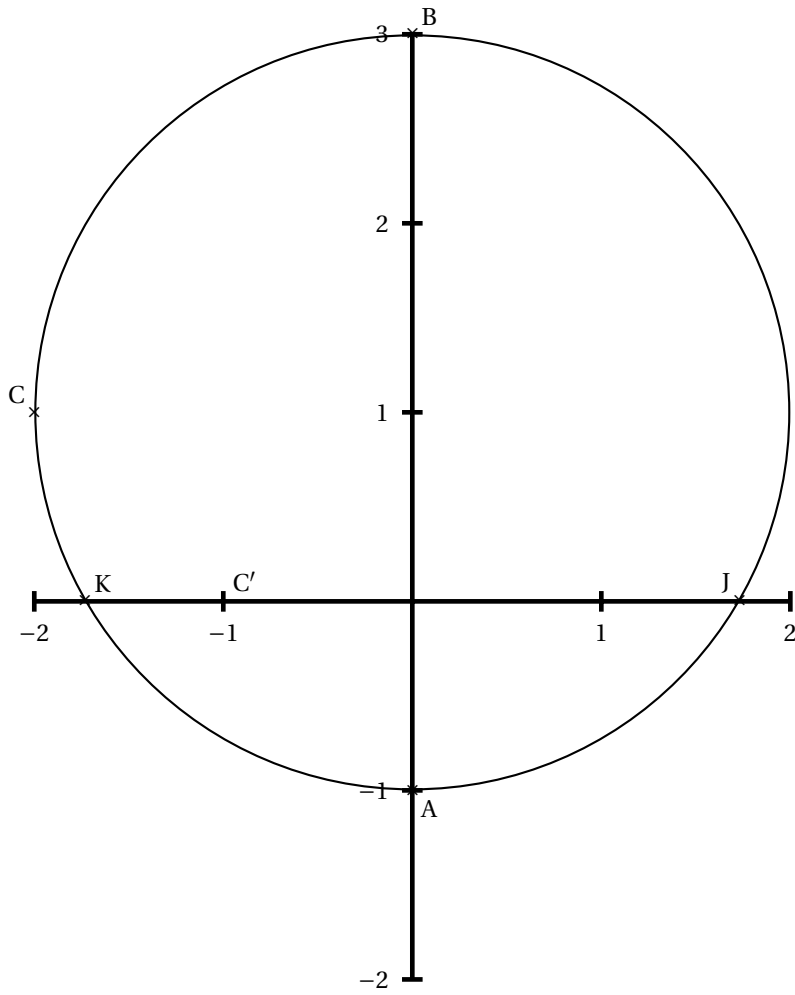
**Commun à tous les candidats**

#### Partie A. Restitution organisée de connaissances

On a  $\arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right) = \arg z \iff \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg z' = \arg z \iff \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ .

#### Partie B

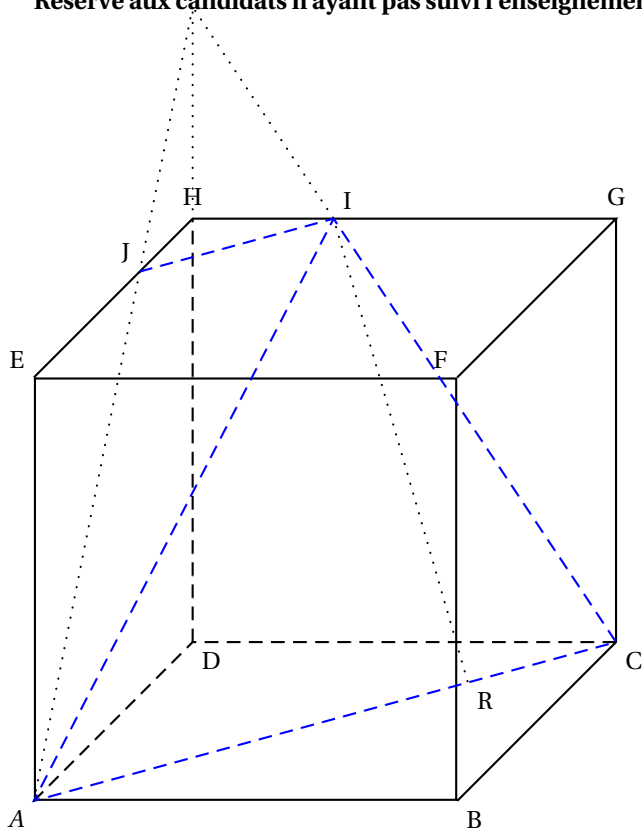
1. **a.**  $M$  d'affixe  $z$  (avec  $z \neq -i$ ) est invariant par  $f$  si et seulement si  $z = \frac{iz+3}{z+i} \iff z^2 + iz = iz + 3 \iff z^2 = 3$ . Les points invariants sont donc les points  $J$  et  $K$  d'affixes respectives  $\sqrt{3}$  et  $-\sqrt{3}$ .  
Le cercle de diamètre  $[AB]$  a pour rayon 2 et pour centre le point d'affixe  $i$ . Or la distance de ce point à  $J$  est égale à  $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ , donc  $J$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$ . Même calcul pour  $K$ .
- b.** Si  $c'$  est l'affixe de  $C'$ , alors  $c' = \frac{i(-2+3i)}{-2+i+i} = \frac{2-2i}{-2+2i} = -1$ . Donc  $C'$  appartient à l'axe des abscisses.
2. On peut écrire  $z' = \frac{iz+3}{z+i} = \frac{i(z-3i)}{z-(-i)}$ . En prenant les arguments de ces deux complexes (et en utilisant le résultat de la partie A) on obtient  $\arg(z') = \arg i + \arg\left(\frac{z-3i}{z-(-i)}\right) \text{ à } 2\pi \text{ près} \iff \arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \text{ à } 2\pi \text{ près} \iff \arg(z') = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$ .
3. **a.**  $z'$  est imaginaire pur si et seulement si son argument est  $\frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$ . Les points  $M$  correspondants sont tous les points de la droite  $(AB)$  excepté les points  $A$  et  $B$ .  
**b.** – Si  $M$  appartient au demi-cercle contenant  $K$ , alors  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$  et par conséquent  $\arg(z') = \pi$ , donc  $M'$  a une affixe réelle négative.  
– Si  $M$  appartient au demi-cercle contenant  $J$ , alors  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}$  et par conséquent  $\arg(z') = 0$ , donc  $M'$  a une affixe réelle positive.  
Dans tous les cas si  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  privé des points  $A$  et  $B$ , le point  $M'$  appartient à l'axe des abscisses.  
Autre méthode numérique : Si  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$ , son affixe s'écrit  $z = i + 2e^{2i\theta}$ , avec  $\theta \in [0 ; 2\pi]$ . On trouve alors que  $z' = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} \in \mathbb{R}$ .



**EXERCICE 2**

**Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**5 points**



1. Voir figure
2. Construction du point J :
  - Dans le plan CDHG, la droite (IC) coupe la droite (DH) en un point P ;
  - Dans le plan ADHE la droite (PA) coupe la droite (EH) en J.
 Le plan (ACI) est donc coupé par les deux faces parallèles (ABCD) et (EFGH) : les intersections (AC) et (IJ) sont donc parallèles.
3.
  - a.  $R \in (AC)$  : on sait qu'il existe un réel unique  $k$  tel que  $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$ , ce réel  $k$  étant l'abscisse de R si l'origine de la droite (AC) est le couple (A, C).  
 $(IR) \perp (AC) \iff \overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .
  - b. Si R a pour coordonnées  $(x, y, z)$ ,  $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC} \implies x = k, y = k, z = 0$ .  
 $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{3}\right) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z-1) \times 0 = 0 \iff x - \frac{1}{3} + y - 1 = 0$ .  
 D'où en remplaçant par les coordonnées de R :  $2k - \frac{4}{3} = 0 \iff k = \frac{2}{3}$ .  
 Conclusion :  $R\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$ .
  - c. On calcule  $IR^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{11}{9} \implies IR = \frac{\sqrt{11}}{3}$ .
4.  $\vec{n}$  de coordonnées  $(3; -3; 2)$  est normal au vecteur  $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$  (produit scalaire nul) et au vecteur  $\overrightarrow{AI}\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$ .  
 Le vecteur  $\vec{n}$  orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACI) est un vecteur normal à ce plan.  
 Une équation du plan (ACI) est donc  $3x - 3y + 2z + d = 0$  et comme ce plan contient  $A(0; 0; 0)$ ,  $d = 0$ .  
 Une équation du plan (ACI) est donc :  $3x - 3y + 2z = 0$ .
5. Avec  $F(1; 0; 1)$  on sait que  $d(F, ACI) = \frac{|3 \times 1 - 3 \times 0 + 2 \times 1|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{22}}$ .

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Si  $n = 2 : 1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 = 8 \times 4 + 3$ , c'est-dire que  $1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv 3$  modulo 3. Le triplet  $(1; 3; 5)$  est donc solution.
2.
  - a. Si  $n = 3$

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7
$R$	0	1	4	1	0	1	4	1

Exemple : si  $m = 8n + 3$  alors  $m^2 = 64n^2 + 48n + 9 = 64n^2 + 48n + 8 + 1 = 8 \times (n^2 + 6n + 1) + 1 \iff m^2 \equiv 1$  modulo 8.

- b. Les seuls restes possibles sont donc 0, 1 et 4. Avec trois carrés la somme des restes ne peut être que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, mais pas 7.  
 Conclusion : il n'existe pas d'entier  $x, y, z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$  modulo 8.

Partie B Étude du cas général où  $n \geq 3$

1. S'il existe trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$  modulo  $2^n$  alors  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n q + 2^n - 1 = 2^n(q + 1) - 1$ , donc cette somme est impaire. Donc :
  - aucun des trois n'est pair ;
  - il ne peut y avoir un pair et deux impairs car la somme des carrés serait paire ;
  - il peut y avoir deux pairs ;
  - il ne peut y avoir trois pairs, car la somme des carrés serait paire.
2.  $x = 2q, y = 2r, z = 2s + 1$ .

- a. Donc  $x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1 = 4 \times (q^2 + r^2 + s^2 + s) + 1$ .  
Conclusion  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$  modulo 4
- b. Or on a supposé que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$  modulo  $2^n$  soit  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n \times q + 2^n - 1 = 4\alpha - 1$  (car  $n$  est au moins égal à 3).  
Ceci est impossible : un multiple de 4 plus 1 ne peut être égal à un multiple de 4 moins 1.  
En effet s'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  
 $8\alpha - 1 = 8\beta + 1$  alors  $8\alpha - 8\beta = 2 \iff 4\alpha - 4\beta = 1$ . La différence de deux multiples de 4 ne peut être égale à 1. Conclusion ; il n'existe pas de triplet solution avec un seul impair.
3. On suppose que  $x, y, z$  sont impairs.
- a. Pour tout naturel  $k$  non nul,  $k^2 + k = k \times (k + 1)$  produit de deux naturels consécutifs : l'un des deux facteurs est pair, donc le produit est pair.
- b. Posons :  $x = 2q + 1, y = 2r + 1$  et  $z = 2s + 1$ , alors  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4q + 1 + 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = (4q^2 + 4q) + (4r^2 + 4r) + (4s^2 + 4s) + 3 = 4[(q^2 + q) + (r^2 + r) + (s^2 + s)] + 3$ . Or d'après la question précédente chaque parenthèse est un nombre pair, donc  $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \times (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + 3 = 8(\alpha + \beta + \gamma) + 3$  c'est-à-dire que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$  modulo 8.
- c. Or puisque  $n \geq 3$  on peut écrire  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^3 \times 2^{n-3}q + 2^3 \times 2^{n-3} - 1 = 2^3a - 1 = 8a - 1$ . (avec  $a \in \mathbb{N}$ )  
On peut expliciter : s'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  
 $8\alpha - 1 = 8\beta + 3$  alors  $8\alpha - 8\beta = 4 \iff 2\alpha - 2\beta = 1$ . La différence de deux pairs ne peut être égale à 1. Ceci est impossible : Un multiple de 8 plus 3 ne peut être égal à un multiple de 8 moins 1.  
Conclusion finale : pour  $n > 2$  le problème proposé n'a pas de solution.

**EXERCICE 3**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

1. a. L'énoncé dit que  $p_1 = 0,5$ , que  $p_{G_1}(G_2) = 0,7$  et que  $p_{P_1}(G_2) = 1 - 0,8 = 0,2$ .
- b. Puisqu'il n'y a pas de match nul, on a  $p_n + q_n = 1$ .
- c. Pour  $n \geq 1, p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p_{G_n}(G_{n+1}) + p_{P_n}(G_{n+1}) = p_n \times 0,7 + (1 - p_n) \times 0,2 \iff p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2 - 0,2p_n = 0,5p_n + 0,2$ .
2. a. On peut écrire par exemple la relation de récurrence précédente  
 $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2 \iff p_{n+1} - 0,4 = 0,5p_n + 0,2 - 0,4 \iff$   
 $p_{n+1} - 0,4 = 0,5p_n - 0,2 \iff p_{n+1} - 0,4 = 0,5(p_n - 0,4) \iff$   
 $v_{n+1} = 0,5v_n$ .  
Cette relation de récurrence montre que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5.  
On en déduit que  $v_n = v_1 \times 0,5^n$ . Or  $v_1 = p_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$ . Donc  $v_n = 0,1 \times 0,5^n$ .
- b. On en déduit que  $p_n = v_n + 0,4 = p_n = 0,4 + 0,1 \times 0,5^n$ .
- c. Comme  $-1 < 0,5 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,4$ .  
Cela signifie que sur un grand nombre de parties, Pierre gagnera en moyenne 4 parties sur 10.

**EXERCICE 4**

**7 points**

**Commun à tous les candidats Partie A**

1. Soit  $u$  telle que  $u(x) = xe^{-x}$ ; alors  $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$  et  $u' + u = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$ , donc  $u$  est bien une solution de l'équation différentielle (E).
2.  $(E_0) : y' + y = 0 \iff y' = -y$ . Les solutions de cette équation sont les fonctions  $x \mapsto Ce^{-x}$ ,  $C$  étant un réel quelconque.

3. Une fonction  $v$  est solution de (E) si et seulement si  $v' + v = e^{-x}$ . On a vu à la question 1 que  $u$  est une telle fonction donc que  $u' + u = e^{-x}$ . En calculant la différence membre à membre :  $v' - u' + v - u = 0 \iff (v - u)' + (v - u) = 0$ , autrement dit, la fonction  $v - u$  est solution de  $E_0$ .
4. On a donc pour toute solution  $v$  de (E),  $v - u = Ce^{-x} \iff v = u + Ce^{-x} \iff v = xe^{-x} + Ce^{-x} \iff v = (x + C)e^{-x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .
5. La solution  $f_2$  prenant la valeur 2 en 0 vérifie  $f_2(0) = (0 + C)e^0 = 2 \iff C = 2$ .  
Conclusion :  $f_2(x) = (x + 2)e^{-x}$ .

**Partie B**

1. - On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + k) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , donc par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + k)e^{-x} = -\infty$ .  
- On a  $f_k(x) = xe^{-x} + ke^{-x}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$ .  
L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_k$  au voisinage de plus l'infini.
2. On remarque que les fonctions  $f_k$  sont toutes les solutions de l'équation différentielle (E), donc  $f'_k + f_k = e^{-x}$ . Donc  $f'_k(x) = e^{-x} - f_k(x) = e^{-x} - (x + k)e^{-x} = f'_k(x) = e^{-x}(1 - k - x)$ .
3. Comme  $e^{-x} > 0$  quel que soit  $x$  réel, le signe de  $f'_k(x)$  est celui de  $1 - k - x$  expression qui s'annule pour  $x = 1 - k$ . D'où le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$1 - k$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$			
	$-\infty$		0

**Partie C**

1. a.  $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-2}^0 = -1 + e^2 = e^2 - 1$ .
- b. On a  $I_{n+1} = \int_{-2}^0 x^{n+1} e^{-x} dx$ . On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{n+1} & v'(x) &= e^{-x} \\ u'(x) &= (n+1)x^n & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

toutes ces fonctions étant continues, car dérivables. En intégrant par parties :

$$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_{-2}^0 + (n+1) \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx, \text{ c'est-à-dire}$$

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n.$$

On a donc une relation de récurrence pour le calcul de  $I_n$ .

- c. Pour  $n = 0$ , la relation précédente s'écrit  $I_1 = -2e^2 + I_0 = -2e^2 + e^2 - 1 = -e^2 - 1$ .  
De même avec  $n = 1$ , on obtient :  $I_2 = (-2)^2 e^2 + 2I_1 = 4e^2 - 2e^2 - 2 = 2e^2 - 2$ .
2. a. D'après A. 5. la fonction représentée est la fonction  $f_2$ . Donc  $k = 2$ .
- b. On a  $\mathcal{S} = \int_{-\frac{3}{2}}^0 (x+2)e^{-x} dx = \int_{-\frac{3}{2}}^0 xe^{-x} dx + 2 \int_{-\frac{3}{2}}^0 e^{-x} dx = I_1 + 2I_0 = -e^2 - 1 + 2(e^2 - 1) = e^2 - 3$  u.a. (environ 4,39 u.a. ce que l'on contrôle sur le dessin)