

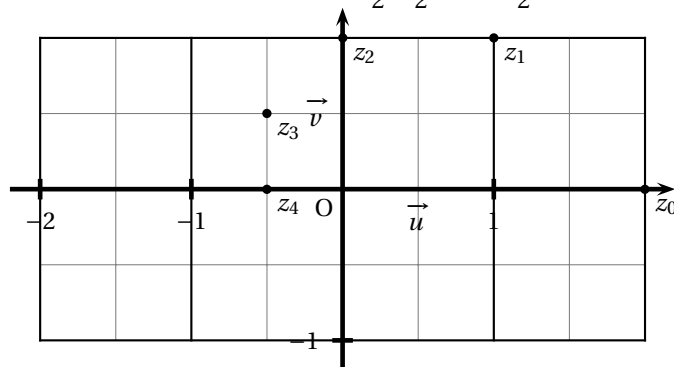
~ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry ~
3 avril 2006

EXERCICE 1

1.
 - a. Faux. Contre-exemple : $(e^2)^3 = e^6$ et $e^{(2^3)} = e^8$.
 - b. Vrai.
 - c. Faux. L'équation de la tangente est $y - e = e(x - 1) \iff y = ex$
2.
 - a. Vrai.
 - b. Faux. Exemple la fonction valeur absolue est continue et non dérivable en 0.
 - c. Vrai. Définition du nombre dérivé $f'(a)$.
3.
 - a. Faux. Contre-exemple : $u_n = 3n$ et $v_n = -2n$.
 - b. Vrai : la suite a pour limite plus ou moins l'infini.
 - c. Vrai : même chose, la suite a pour limite plus ou moins l'infini.
 - d. Faux : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, la suite diverge.

EXERCICE 2 (non spécialistes)

1. $z_0 = 2, z_1 = 1 + i, z_2 = i, z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, z_4 = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.



2. On a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n$.

L'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a $u_0 = |z_0| = |2| = 2$. On sait que $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Finalement :

$$u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. On a $OA_n = |z_n| = u_n$, donc A_n appartient au disque (fermé) de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si $u_n \leq 0,1 \iff 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0,1 \iff 20 \leq (\sqrt{2})^n \iff 20 \leq 2^{\frac{n}{2}} \iff \frac{n}{2} \ln 2 \geq \ln 20 \iff n \geq \frac{2 \ln 20}{\ln 2} \approx 8,6$.
La condition sera donc réalisée la première fois par u_9 . On a donc $n_0 = 9$.
La calculatrice livre $u_8 = 0,125$ et $u_9 \approx 0,084 < 0,1$.

4.
 - a. Pour tout naturel $n, u_n \neq 0$ donc $z_n \neq 0$. On peut donc écrire $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} =$

$$\frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{1+i-2}{1+i} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{i(1+i)}{1+i} = i.$$

L'interprétation géométrique de cette égalité est :

- $(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = +\frac{\pi}{2}$. Conclusion : pour tout naturel n le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .
- En modules l'égalité donne $\frac{A_n A_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1 \iff A_n A_{n+1} = OA_{n+1}$. Conclusion le triangle $OA_n A_{n+1}$ est isocèle en A_{n+1} .
Finalement pour tout naturel n , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1} , comme on peut le voir sur les quatre premiers triangles de la figure ci-dessus.

- b.** Comme les triangles sont isocèles $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n = OA_1 + OA_2 + \dots + OA_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
Cette somme est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = \sqrt{2}$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{On a donc } \ell_n = \sqrt{2} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}^n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}^n - 1)}{\sqrt{2}^{n-1}(\sqrt{2} - 1)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}^n - 1}{\sqrt{2}^{n-1}} = \sqrt{2}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}.$$

EXERCICE 2 (spécialité)

- 1.** La transformation f est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$: c'est donc une similitude.

Cherchons son centre Ω invariant par f :

$$z_\Omega = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_\Omega + 1 \iff z_\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 1 \iff z_\Omega(1-i) = 2 \iff z_\Omega = \frac{2}{1-i} = 1+i.$$

Le centre de la similitude est donc Ω d'affixe $1+i$.

Les deux égalités $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$ et $1+i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1+i) + 1$ entraînent par différence :

$$z' - (1+i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)[z - (1+i)].$$

Or $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$. L'écriture de la similitude est donc finalement :

$$z' - (1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}[z - (1+i)].$$

On reconnaît la composée (dans n'importe quel ordre)

- d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$;
 - d'une homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- 2. a.** Les affixes sont respectivement : 0 ; 1 ; $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$; $\frac{3}{2} + i$.

- b.** On a $u_n = \Omega A_n = |z_n - z_\Omega|$.

Or d'après la question 1., $z_{n+1} - z_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}[z_n - z_\Omega]$, soit en prenant les modules :

$$|z_{n+1} - z_\Omega| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}[z_n - z_\Omega]\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \times \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \times |z_n - z_\Omega| = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \times |z_n - z_\Omega|,$$

ou encore $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n$, égalité qui montre que la suite (u_n) est une suite

géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de premier terme $u_0 = \Omega A_0 = \Omega O = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1).

Il en résulte que $u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

- c. D'après l'expression de u_n , tous les termes de la suite sont non nuls et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$: la suite est donc décroissante.

Donc s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} < 0,1$, tous les termes successifs vérifieront aussi cette inégalité.

Or $u_{n_0} < 0,1 \iff \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0} < 0,1 \iff \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0-1} < 0,1$, d'où d'après la croissance de la fonction logarithme népérien, $-(n_0-1) \ln \sqrt{2} < -\ln 10 \iff \ln 10 < (n_0-1) \ln \sqrt{2} \iff \frac{\ln 10}{\ln \sqrt{2}} < n_0-1 \iff n_0 > 1 + \frac{\ln 10}{\ln \sqrt{2}} \approx 7,6$.

Conclusion : le premier point appartenant au disque de centre Ω et de rayon 0,1 est le point A_8 .

3. a. Le triangle $\Omega A_0 A_1$ est clairement rectangle isocèle en A_1 .
Démontrons par récurrence que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1} :
- La propriété est initialisée pour $n = 0$.
 - Supposons que le triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ soit rectangle isocèle en A_n . Or le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est tout simplement l'image par la similitude du triangle $\Omega A_{n-1} A_n$: il est donc de même nature, soit rectangle isocèle en A_{n+1} .
- La démonstration par récurrence est achevée.
- b. D'après la question précédente $\ell_n = A_0 A_1 + \dots + A_{n-1} A_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \dots + \Omega A_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, soit la somme des n premiers termes (exception faite de u_0) de la suite géométrique vue ci-dessus.

On a donc $\ell_n = 1 \times \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$.

Comme $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2 + \sqrt{2}$.

EXERCICE 3

Partie A

1. $M(x; y; z) \in \Delta \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda \vec{n}$, car on sait que \vec{n} est un vecteur normal au plan P . On a donc

$$\begin{cases} x - x_I = \lambda a \\ y - y_I = \lambda b \\ z - z_I = \lambda c \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_I + \lambda a \\ y = y_I + \lambda b \\ z = z_I + \lambda c \end{cases}$$

qui est une équation paramétrique de la droite Δ .

2. D'après la question 1, H est un point de Δ , il vérifie donc lui aussi la relation de colinéarité :

$$\overrightarrow{IH} = k \vec{n}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

3. On a donc $\begin{cases} x_H = x_I + ka \\ y_H = y_I + kb \\ z_H = z_I + kc \end{cases}$ mais comme H appartient au plan P , ses coordonnées vérifient l'équation du plan soit $a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) +$

$$d = 0 \iff k(a^2 + b^2 + c^2) + ax_I + by_I + cz_I + d = 0 \iff k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

(car a , b et c ne sont pas simultanément nuls).

4. La relation vectorielle $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ entraîne l'égalité des normes : $IH = |k| \|\vec{n}\| = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

1. On applique la partie A avec $I = \Omega$ et H point commun au plan \mathcal{Q} et au plan P , le rayon de la sphère est donc

$$IH = \Omega H = \frac{|1 \times 1 - 1 \times (-1) + 1 \times 3 - 11|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

2. Un système d'équations paramétriques de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

3. En reportant ces coordonnées dans l'équation de \mathcal{Q} on obtient $1 + \lambda + 1 + \lambda + 3 + \lambda - 11 = 0 \iff 3\lambda - 6 = 0 \iff \lambda = 2$. En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite Δ on obtient :

$x = 3$; $y = -3$; $z = 5$. Le point commun à la sphère et au plan a pour coordonnées $(3 ; -3 ; 5)$.

EXERCICE 4**Partie A**

1. Soit f dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$ et vérifiant

$$f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))] \quad (1). \text{ La fonction } f \text{ étant strictement positive, la}$$

fonction $g = \ln f$ est bien définie sur $[0 ; +\infty[$ et $g' = \frac{f'}{f} \iff f' = f \times g'$. Mais

alors l'équation différentielle (1) s'écrit $f g' = -\frac{1}{20}f[3 - \ln f] \iff$

$$g' = -\frac{1}{20}[3 - g], \text{ car } f \neq 0.$$

Inversement si la fonction $g = \ln f$ vérifie l'équation différentielle

$$g' = -\frac{1}{20}[3 - g] \quad (2), \text{ alors puisque } g' = \frac{f'}{f} \text{ existe comme dérivée de la fonction}$$

composée de f avec la fonction \ln sur $[0 ; +\infty[$, l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{20} \ln f - \frac{3}{20} \iff f' = \frac{1}{20}f \ln f - f \frac{3}{20} = -\frac{1}{20}f[3 - \ln f].$$

On a donc bien montré l'équivalence.

2. Les solutions de l'équation $z' = -\frac{1}{20}z$ sont les fonctions $t \mapsto e^{\frac{t}{20}}$.

D'autre part une solution particulière constante de l'équation $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$

$$\text{est le nombre } -\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = 3.$$

Finalement les solutions de l'équation $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$ sont les fonctions

$$t \mapsto g(t) = 3 + Ce^{\frac{t}{20}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

3. D'après la question 1, les fonctions solutions de (E) sont les fonctions f telles que $g = \ln f \iff f = \exp(g)$.

Conclusion finale : les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions f telles que :

$$f(t) = \exp\left(3 + Ce^{\frac{t}{20}}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Soit $f(t) = \exp\left(3 - 3e^{\frac{t}{20}}\right)$.

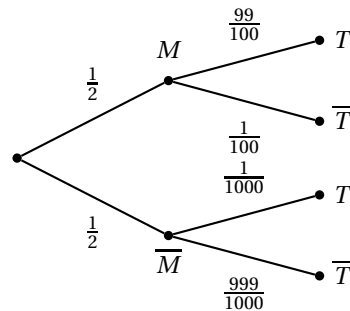
- a. De $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{t}{20}} = +\infty$, il résulte que $\lim_{t \rightarrow +\infty} -3e^{\frac{t}{20}} = -\infty$ et enfin que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0_+$.
- b. On a $f'(t) = -\frac{3}{20}e^{\frac{t}{20}} \exp\left(3 - 3e^{\frac{t}{20}}\right)$ et comme les exponentielles sont strictement positives, f' est du signe de $-\frac{3}{20} < 0$. La fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$ de 1 (millier) à 0.
- c. $f(t) < 0,02 \iff \exp\left(3 - 3e^{\frac{t}{20}}\right) < 0,02$ soit d'après la croissance de la fonction logarithme népérien $3 - 3e^{\frac{t}{20}} < \ln 0,02 \iff 3 - 3e^{\frac{t}{20}} < -\ln 50 \iff 3e^{\frac{t}{20}} > 3 + \ln 50 \iff e^{\frac{t}{20}} > \frac{3 + \ln 50}{3} \iff \frac{t}{20} > \ln\left(\frac{3 + \ln 50}{3}\right) \iff t > 20 \times \ln\left(\frac{3 + \ln 50}{3}\right)$.

L'ensemble solution est donc $S = \left] 20 \ln\left(\frac{3 + \ln 50}{3}\right); +\infty[$.

On a : 0,02 millier correspond à 20 individus. Comme $20 \times \ln\left(\frac{3 + \ln 50}{3}\right) \approx 16,6$, la population sera inférieure à 20 individus à partir de la dix-septième année.

Partie B

1. On dresse un arbre pondéré :



On a $p(M) = \frac{1}{2}$; $p_M(T) = \frac{99}{100}$ $p_{\bar{M}}(T) = \frac{1}{1000}$ (d'après l'énoncé)

2. On a $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = \frac{1}{2} \times \frac{99}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1000} = \frac{991}{2000}$.

3. On a $p_{T|M} = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{\frac{99}{200}}{\frac{991}{2000}} = \frac{990}{991}$. Comme $\frac{990}{991} \approx 0,99899 < 0,999$, on en déduit que le test n'est pas fiable.