Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Polynésie septembre 2005

Exercice 1 — 5 points

1. À partir de $a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0$, on obtient :
$a_1 = 0 \quad b_1 = \dfrac{1}{3} \quad c_1 = \dfrac{2}{3}$
$a_2 = \dfrac{1}{6} \quad b_2 = 0 \quad c_2 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{6}$
$a_3 = 0 \quad b_3 = \dfrac{1}{18} \quad c_3 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{18}$

2. **a.** De trois choses l'une : ou la puce est en A, ou elle est en B, ou elle est en C ; d'où $a_n + b_n + c_n = 1$.
D'autre part elle ne peut être en A que si elle était précédemment en B : $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n$ et elle ne peut être en B que si elle était précédemment en A, soit $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$.

b. D'après la question précédente : $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1}$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$; donc $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}a_n\right) = \dfrac{1}{6}a_n$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On a $a_{2\times 0} = 1 = \left(\dfrac{1}{6}\right)^0$ (initialisation).
Hérédité : supposons que $a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p$ et calculons $a_{2p+2} = \dfrac{1}{6}a_{2p}$
$= \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^p = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{p+1}$. La formule est donc vraie au rang $p+1$. La récurrence est établie. D'autre part par récurrence immédiatte : $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2p+1} = 0$.
Il suit que $b_{2p} = \dfrac{1}{3}a_{2p-1} = 0$ quel que soit p.
Calculons $b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}a_{2p} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p$.

3. Pour (a_n) : les termes de rang impair sont nuls, et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Pour la même raison $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
Or $c_n = 1 - a_n - b_n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$. Au bout d'un certain temps la puce sera pratiquement toujours dans la case C.

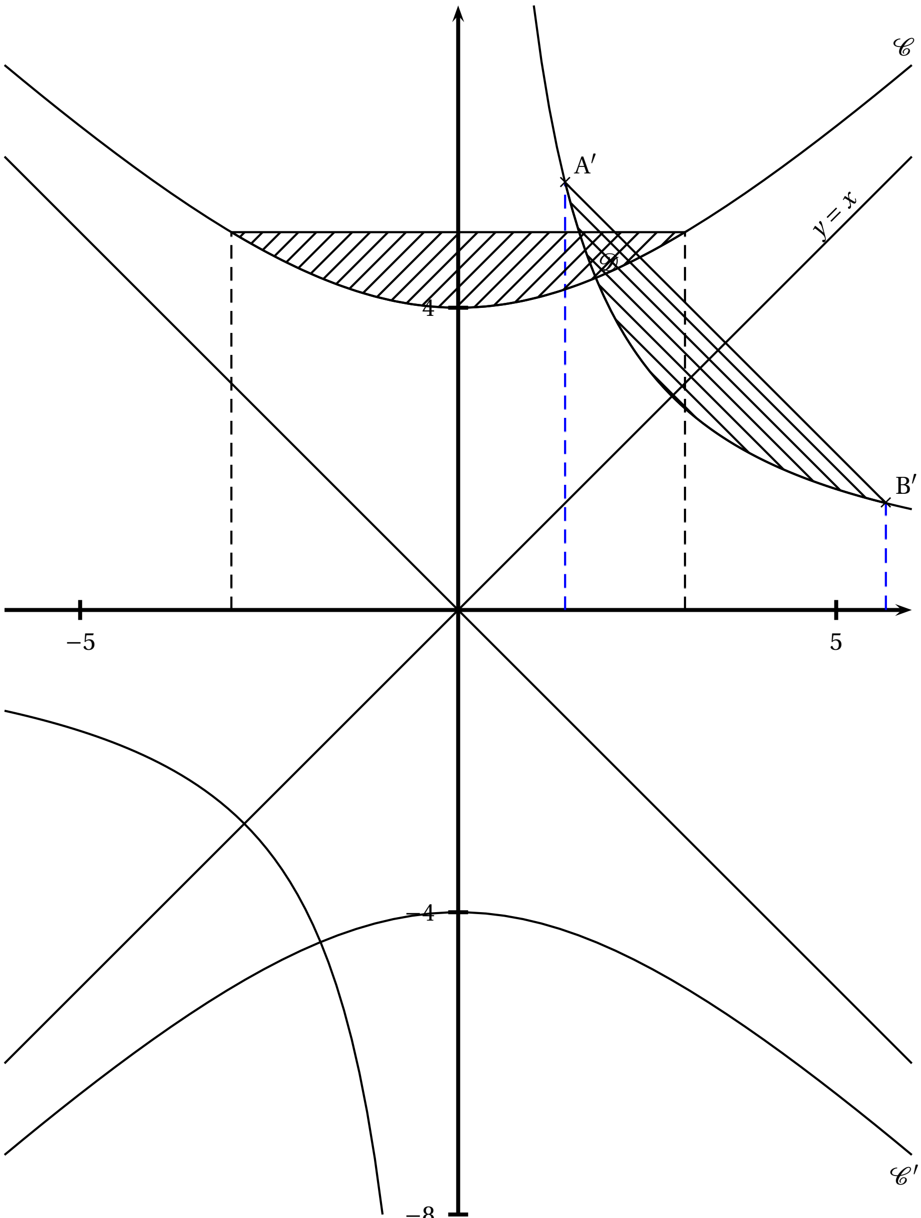
Exercice 2 — 5 points

Partie A

1. $y^2 - x^2 = 16 \iff y^2 = x^2 + 16 \iff \begin{cases} y = \sqrt{x^2+16} \\ y = -\sqrt{x^2+16} \end{cases}$. La représentation graphique de $\mathcal{H}$ est donc la réunion de la représentation $\mathcal{C}$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+16}$ et de la courbe $\mathcal{C}'$ symétrique autour de $(\mathrm{O}x)$ de $\mathcal{C}$.

2. $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ est définie sur $\mathbb{R}$; composée dedeux fonctions dérivables, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$et $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$. La fonction est donc décroissantesur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

a. Calculons $\Delta(x) = f(x) - x = \sqrt{x^2+16} - x = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)}{\sqrt{x^2+16}+x} = \dfrac{x^2+16-x^2}{\sqrt{x^2+16}+x} = \dfrac{16}{\sqrt{x^2+16}+x}$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \Delta(x) = \lim_{x\to+\infty} \Delta(x) = 0_+$. Ceci signifie que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de l'infini, la courbe restant au-dessus de son asymptote.



b.

Par différence avec l'aire du rectangle, on a aire$(\mathscr{D}) = 30 - \displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$ (u.a.).

Partie B

1. a. La rotation a pour écriture complexe : $z' = z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   b. Avec $z = x + \mathrm{i}y$ et par identification $x' + \mathrm{i}y' = (x + \mathrm{i}y)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ on obtient : $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\\ y' &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)\end{array}\right.$

   On a $\mathrm{A}'(\sqrt{2}\,;\,4\sqrt{2})$ et $\mathrm{B}'(4\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2})$.

2. a. Cf. figure ci-dessus.

   b. Si $M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}$, alors $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{x^2+16})\\ y' &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+\sqrt{x^2+16})\end{array}\right.$. D'où

   $x' \times y' = \dfrac{x^2+16-x^2}{2}\dfrac{16}{2}) = 8$.

   De même avec un point de $\mathscr{C}'$. Ceci signifie que l'image de $\mathscr{H}$ par la rotation r est bien $\mathscr{H}'$.

3. a. Cf. figure ci-dessus.

   b. Par différence avec l'aire d'un trapèze (on pouvaitégalement utiliser le rectangle du **2. a.** de la **Partie A** on a :

   $\text{aire}(\mathscr{D}') = \dfrac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} \times \left(4\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) - \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \dfrac{8}{x}\,\mathrm{d}x = 15 - 8\,[\ln x]_{\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} =$
   $15 - 8\ln 4$.

   La rotation conservant les aires, on a :

   $\text{aire}(\mathscr{D}') = \text{aire}(\mathscr{D}) = 15 - 8\ln 4 \approx 3,910$ (u.a. ou cm^2)

EXERCICE 3 — 3 points

1. Réponse : **b.**
2. Réponse : **c.**
3. Réponse : **a.**

EXERCICE 4 — 5 points

1. a. On a $-1 \leqslant \cos(4x) \leqslant 1$, donc par produit :

   $$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

   b. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'après le théorème des « gendarmes » : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est donc asymptote à Γ au voisinage de plus l'infini.

2. On sait que $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\cos(4x) \iff \cos(4x) = 1 \iff 4x = 0\ [2\pi] \iff x = 0\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Les points communs aux deux courbes sont donc les points $M_k\left(k\dfrac{\pi}{2}\,;\,\mathrm{e}^{-k\frac{\pi}{2}}\right)$.

3. a. $u_{n+1} = f\left((n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-(n+1)\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} = u_n \times \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

   b. $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,2$ et $u_0 = 1$ donc la suite est positive et décroissante et d'après la question **1. a.** la limite de cette suite est nulle.

4. **a.** On a $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos(4x) - \mathrm{e}^{-x} \times 4\sin(4x) = -\mathrm{e}^{-x}[\cos(4x) + 4\sin(4x)]$.
De même $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

b. Or si $x = k\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(4x) = 1$ et $\sin(4x) = 0$.
On a donc $f'\left(k\dfrac{\pi}{2}\right) = g'\left(k\dfrac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-k\frac{\pi}{2}}$. Donc les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. On a $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx -0,2$.