

EXERCICE 1

5 points

1. a. On a $u_0 = 1$, $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{4}$ et $u_3 = \frac{7}{8} \geq 0$.
La relation est vraie au rang 3.
Supposons que pour $n \geq 3$, $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{2} + n - 1$. Or $n \geq 3 \Leftrightarrow n - 1 \geq 2$, donc $u_{n+1} \geq 2 > 0$. L'hérédité est démontrée.
On a donc démontré par récurrence que pour $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.
- b. $n \geq 4 \Leftrightarrow n - 1 \geq 3$; d'après a, $u_{n-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_{n-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \geq n - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_{n-1} + (n - 1) - 1 \geq n - 2 \Leftrightarrow u_n \geq n - 2$.
- c. Par comparaison, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. a. $v_n = 4u_n - 8n + 24 \Rightarrow v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) - 1 = 2u_n + 4n - 4 - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12 = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \frac{1}{2}v_n$.
On a donc démontré que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
La raison étant inférieure à 1, cette suite est décroissante. De plus $v_0 = 4u_0 + 24 = 28$.
- b. On a immédiatement $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4u_n - 8n + 24 \Leftrightarrow 4u_n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n - 24 \Leftrightarrow u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 6$.
- c. On a donc $u_n = \underbrace{7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{suite géométrique}} + \underbrace{-2n + 6}_{\text{suite arithmétique}} = x_n + y_n$ où (x_n) est la suite (v_n) au facteur 4 près et la suite (y_n) est définie par $y_n = -2n + 6$, suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 6.
- d. On en déduit que $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^n x_k + \sum_{k=0}^n y_k$.
Or $\sum_{k=0}^n x_k = \frac{7 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 14 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
D'autre part $\sum_{k=0}^n y_k = -6(n+1) + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = -6n - 6 + n(n+1) = -6n - 6 + n^2 + n = n^2 - 5n - 6$.
Finalement $S_n = n^2 - 5n + 8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 2

5 points

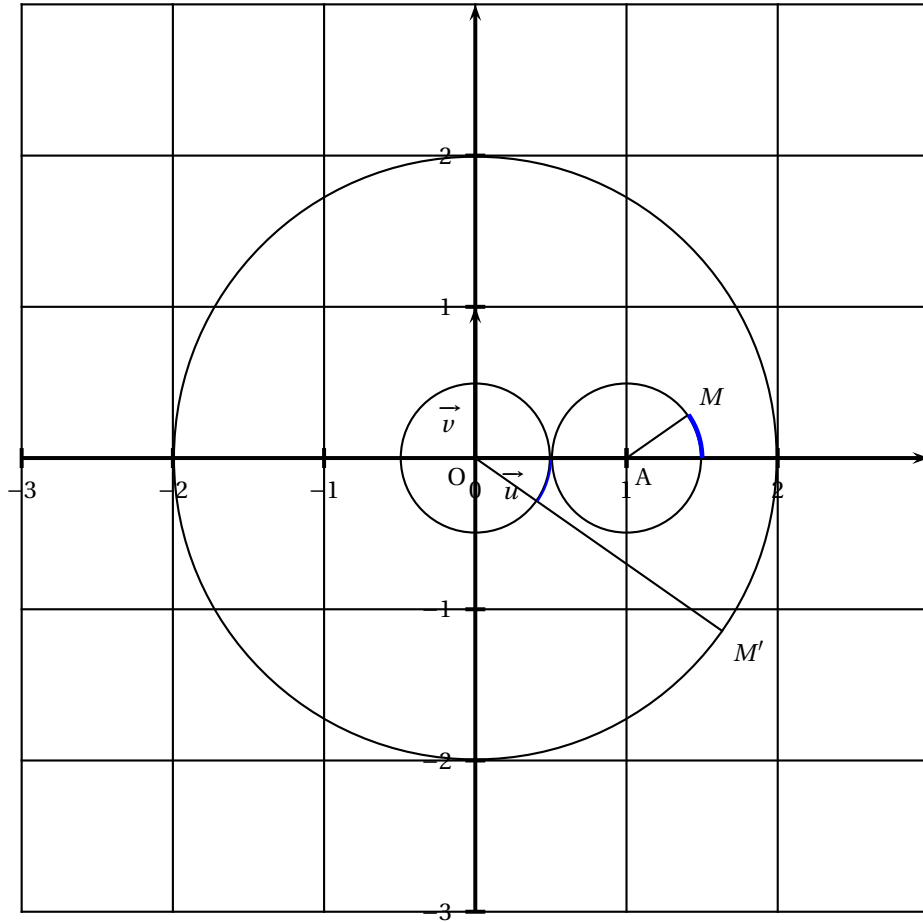
1. On a d'une part
- On sait que $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$. Comme $1 < x$, on a $x < x^2 \Rightarrow x + x^2 < 2x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2} < \frac{1}{x + x^2} \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{2x^2} < \frac{2 \ln x}{x + x^2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} < f(x)$.
 - De même $1 < x \Rightarrow x < x^2 \Rightarrow 2x < x + x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x + x^2} < \frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x + x^2} < \frac{2 \ln x}{2x} \Leftrightarrow f(x) < \frac{\ln x}{x}$.
- D'où l'encadrement demandé.

2. a. Comme $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x}$, on reconnaît une forme uu' avec $u(x) = \ln x$, qui a pour primitive $\left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]$.
- On a donc $I = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_2^4 = \frac{3(\ln 2)^2}{2}$.
- Pour J, on intègre par parties en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x & dv(x) = \frac{1}{x^2} \\ du(x) = \frac{1}{x} & v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$
- $J = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^4 + \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}$.
- b. De l'encadrement trouvé en 1, on en déduit, en intégrant entre 2 et 4 l'encadrement : $J < K < I \iff \frac{1}{4} < K < \frac{3(\ln 2)^2}{2}$.
3. L'unité d'aire vaut $1 \times 4 = 4 \text{ cm}^2$. L'aire cherchée est donc le quadruple de l'intégrale K.
- Donc $\boxed{1 < \mathcal{A} < 6(\ln 2)^2}$ soit approximativement $1 < \mathcal{A} < 2,883$. (cm^2)

EXERCICE 3

4 points

1. a. On a $b' = \frac{1}{3+i\sqrt{3}} = \frac{3-i\sqrt{3}}{9+3} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{12}$.
- Forme exponentielle : $|b'|^2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{144} = \frac{9+3}{144}$. Donc $|b'| = \frac{2\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.
- Or $b' = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{4} - \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
- b. Le symétrique d'un point M d'affixe z est le point d'affixe $-z$. Un point (d'affixe $z \neq 1$) a pour image son symétrique si et seulement si :
- $$\frac{1}{z-1} = -z \iff 1 = -z^2 + z \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$$
- $$\iff \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0 \iff \left(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$
- Cette équation a deux solutions : $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou encore $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. a. $z' = \frac{1}{z-1} \Rightarrow |z'| = \left| \frac{1}{z-1} \right| = \frac{1}{|z-1|}$. De même pour les arguments $z' = \frac{1}{z-1} \Rightarrow \arg(z') = \arg\left(\frac{1}{z-1}\right) = \arg(1) - \arg(z-1) = 0 - \arg(z-1) = -\arg(z-1) \pmod{2\pi}$.
- b. M d'affixe z appartient au cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon r si et seulement si $|z-1| = r$. D'après la question précédente l'image M' de ce point a une affixe z' telle que $|z'| = \frac{1}{|z-1|} = \frac{1}{r} = OM'$.
- Conclusion : l'image d'un point du cercle \mathcal{C} appartient au cercle \mathcal{C}' de centre O et de rayon $\frac{1}{r}$.
- c. Application si $r = \frac{1}{2}$: pour avoir un argument opposé on construit sur les deux cercles de rayons $\frac{1}{2}$ deux arcs de même longueur.



EXERCICE 4

4 points

1. a. On intègre par parties entre 0 et $t \geq 0$ en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \lambda x & dv(x) = e^{-\lambda x} \\ du(x) = \lambda & v(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$$

u et v étant dérivables et u' et v' continues sur $[0; t]$,

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \left[e^{-\lambda x} dx \left(x + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^t = -t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}.$$

b. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

2. Si le temps moyen d'attente est égal à 5 minutes, alors $\frac{1}{\lambda} = 5 \iff \lambda = \frac{1}{5} = 0,2$.

La probabilité d'attendre plus de 10 minutes est : $1 - p(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx =$

$$1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{10} = e^{-1}. \text{ (soit } \approx 0,368 \text{ au millième près)}$$

De même la probabilité d'attendre plus de 5 minutes est : $1 - p(X \leq 5) =$

$$1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^5 = e^{-2}. \text{ (soit } \approx 0,135 \text{ au millième près)}$$

3. Il faut calculer $p(X \geq 15)$ sachant que $X \geq 10$. Or

$$p_{X \geq 10}(X \geq 15) = \frac{p(X \geq 15 \text{ et } X \geq 10)}{p(X \geq 10)} = \frac{p(X \geq 15)}{p(X \geq 10)} = \frac{1 - p(X \leq 15)}{p(X \geq 10)} = \frac{1 - \int_0^{15} 0,2 e^{-0,2x} dx}{p(X \geq 10)} =$$

$$\frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1} \approx 0,368.$$

On a $p_{X \geq 10}(X \geq 15) = p(X \geq 5)$. Donc la probabilité est celle du temps supplémentaire d'attente. La loi exponentielle est une loi sans vieillissement.

EXERCICE 5

4 points

1. Pour respectivement $t = -3$ et $t = -2$, on trouve que A et B sont deux points distincts de la droite dont on a une équation paramétrique. Elle est donc confondue avec la droite (AB).
2. Un point commun à \mathcal{P} et \mathcal{D} a ses coordonnées qui vérifient $2t + 3t - (8 + t) + 4 = 0 \iff 4t - 4 = 0 \iff t = 1$. Il existe donc un point commun de coordonnées $(1; 1; 9)$. Donc \mathcal{P} et \mathcal{D} sont sécantes.
3. On calcule $d(A; \mathcal{P}) = \frac{|1 \times 2 + 3 \times 2 - (-4) + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{16\sqrt{14}}{14} = \frac{8}{7}\sqrt{14}$.
4. \mathcal{S} est la sphère de centre O et de rayon 4.
Or $OB^2 = 9 + 16 + 1 = 26 \Rightarrow OB = \sqrt{26} > \sqrt{25} \geq 5 > 4$.
Conclusion : B est à l'extérieur de \mathcal{S} .