Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

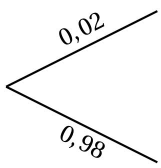
Partie A

1. On a une loi de Bernoulli de paramètres $p = 0,02$ et $n = 50$.
   On a donc $p(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0,02^2 \times 0,98^{48} \approx 0,185\ 8 \approx 0,19$.
2. La probabilité cherchée est $p(X > 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,98^{50} \approx 0,635 \approx 0,64$.
3. On a $\text{E}(X) = n \times p = 50 \times 0,02 = 1$.

Partie B

1. **a.** On a $P([1\ 000\ ;\ +\infty]) = 1 - \displaystyle\int_0^{1000} 5 \times 10^{-4}\text{e}^{10^{-4}}\,\text{d}t = 1 + \left[\text{e}^{-5\times10^{-4}}\right]_0^{1000} =$
   $\text{e}^{-5\times10^{-4}\times10^3} = \text{e}^{-0,5} = \dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}} \approx 0,606 \approx 0,61$.

   b. Même calcul avec λ_2 : $P([1\ 000\ ;\ +\infty]) = 1 - \displaystyle\int_0^{1000} 10^{-4}\text{e}^{10^{-4}}\,\text{d}t = 1 +$
   $\left[\text{e}^{-10^{-4}}\right]_0^{1000} = \text{e}^{10^{-4}\times10^3} = \text{e}^{-0,1} \approx 0,904 \approx 0,90$.

2. 

   $P(T \geqslant t) = 1 - \displaystyle\int_0^t 5 \times 10^{-4}\text{e})-5 \times 10^{-4}\,\text{d}t = 0,02\text{e}^{-5\times10^{-4}t}$

   $P(T \geqslant t) = 1 - \displaystyle\int_0^t 10^{-4}\text{e})-10^{-4}\,\text{d}t = 0,98\text{e}^{-10^{-4}t}$

   D'où en faisant la somme, le résultat demandé.
3. On a $P_{T\geqslant100}(\text{défectueux}) = \dfrac{P\left[(T \geqslant 1000) \cap P(\text{défectueux})\right]}{P(T \geqslant 1000)} =$
   $\dfrac{0,02 \times \text{e}^{-0,5}}{0,02 \times \text{e}^{-0,5} + 0,98 \times \text{e}^{-10^{-1}}} \approx 0,013 \approx 0,01$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

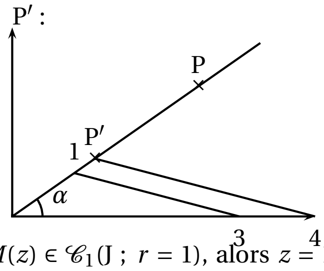
1. Un point $M(z)$ est invariant si et seulement si $z' = z = \dfrac{4}{\overline{z}} \iff z\overline{z} = 4 \iff$ $|z|^2 = 4 \iff |z| = 2$.
   Les points invariants sont donc tous les points dont l'affixe a pour module 2 ; le cercle de centre O et de rayon 2 est donc invariant par f.
2. On a $z' = 1 = \dfrac{4}{\overline{z}} \iff \overline{z} = 4 \iff z = 4$.
   Le seul point dont l'image par f est J est le point d'affixe 4.
3. Si $\alpha = a + \text{i}b \neq 0$ a un antécédent z par f, alors $a + \text{i}b = \dfrac{4}{x + \text{i}y} \iff (a + \text{i}b)(x +$
   $\text{i}y) = 4 \iff \left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & 4 \\ bx - ay & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{4a}{a^2 + b^2} \\ y & = & \dfrac{4b}{a^2 + b^2} \end{array}\right.$

   Conclusion : le seul antécédent de α par f est le complexe $z = \dfrac{4\alpha}{|\alpha|^2}$.

4. **a.** On a d'après la définition de f et en prenant les arguments :
$\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = 0 - \|eft[-\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{O}M}\right) = \left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$; donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = 0$ modulo 2π. Autrement dit : les points O, M et M' sont alignés.

b. On a $\left|z'\right| = \left|\dfrac{4}{\overline{z}}\right| = \dfrac{4}{|\overline{z}|} = \dfrac{4}{|z|}$.
Donc si $|z| = r > 0$, alors $\left|z'\right| = \dfrac{4}{r}$.
L'image du cercle de centre O et de rayon r est donc le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{4}{r}$. D'après la question précédente à chaque point du premier cercle correspond un point image aligné avec O : conclusion, l'image du cercle est tout le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{4}{r}$.

c. Si OP = 3, $z_{\mathrm{P}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $z_{\mathrm{P}'} = \dfrac{4}{3}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$. D'où une construction de P′ :



5. Si $M(z) \in \mathscr{C}_1(\mathrm{J}\ ;\ r = 1)$, alors $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \neq \pi$, d'où $z' = \dfrac{4}{1+\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha} = \dfrac{4(1+\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha}{1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \dfrac{4(1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}{2+2\cos\alpha} = 2 + \mathrm{i}\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.
Conclusion : le point M' a une abscisse égale à 2. Il appartient à la droite (D) d'équation $x = 2$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On sait que l'écriture de la similitude s est $z' = \alpha z + \beta$, avec α et β complexes.
Or $s(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $s(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$ se traduit par :
$$\begin{cases} 1+2\mathrm{i} &= \alpha\mathrm{i} + \beta \\ 3+2\mathrm{i} &= \alpha\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \beta \\ \end{cases} \iff \begin{cases} 2 &= \alpha \\ 1+2\mathrm{i} &= 2+b \end{cases} \iff \begin{cases} 2 &= \alpha \\ 1 &= \beta \end{cases}$$
L'écriture complexe de s est donc : $z' = 2z + 1$.
On trouve aussitôt que le seul point fixe est le point d'affixe -1, donc le centre de cette similitude.
$z' = 2z + 1 \iff z' + 1 = 2z + 2 \iff z' + 1 = 2(z + 1)$. On reconnaît une homothétie dont le centre est le point d'affixe -1 et de rapport 2.

2. On peut écrire $1U_{n+1} - 2U_n = 1$ ce qui montre d'après le théorème de Bezout que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

3. s étant une homothétie de rapport 2, les termes (naturels) de la suite sont les affixes des points obtenus successivement en prenant les symétriques du point d'affixe -1 autour du point précédent.

4. Démonstration par récurrence :
Initialisation : $U_0 = 2^0 - 1 = 0$: vrai.
Hérédité : supposons que la relation soit vraie pour le naturel n : $U_n = 2^n - 1$.
Alors $\mathrm{U}_{n+1} = 2U_n + 1 = 2\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. La relation est vraie au rang $(n+1)$. Elle est donc vraie pour tout naturel n.

5. Calculons $U_p\left(U_{n-p} + 1\right) + U_{n-p} = \left(2^p - 1\right)\left(2^{n-p} - 1 + 1\right) + 2^{n-p} = 2^n - 2^{n-p} + 2^{n-p} - 1 = 2^n - 1 = U_n$.
L'égalité précédente peut s'écrire : $U_n - U_p\left(U_{n-p} + 1\right) = U_{n-p}$.

Le pgcd à U_n et U_p, divise U_p, donc aussi $U_p\left(U_{n-p}+1\right)$ et par différence divise $U_n - U_p\left(U_{n-p}+1\right)$ c'est-à-dire U_{n-p} et c'est le plus grand diviseur commun. Donc $\text{pgcd}\left(U_n,\ U_p\right) = \text{pgcd}\left(U_p,\ U_{n-p}\right)$.

6. On sait que pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{N}$, $x^a - 1 = (x-1)(\ldots)$, donc $x-1$ divise $x^a - 1$.
Soit d le pgcd de U_n et U_p. Il existe donc deux naturels k et k' premiers entre eux tels que $n = kd$ et $p = k'd$.
De plus il n'existe pas d'autre écriture de n et p sous forme de produit avec un facteur commun supérieur à d, d'après la définition du pgcd.
$U_n = 2^n - 1 = 2^{kd} - 1 = \left(2^d\right)^k - 1 = (2^d-1)(\ldots)$, c'est-à-dire que $2^d - 1$ divise U_n.
De même $U_p = 2^p - 1 = 2^{k'd} - 1 = \left(2^d\right)^{k'} - 1 = (2^d-1)(\ldots)$, c'est-à-dire que $2^d - 1$ divise U_p.
Donc $2^d - 1 = U_d = U_{\text{pgcd}(n,\ p)}$ est le plus grand diviseur commun à U_n et U_p.
Application : $15 = 3 \times 5$. Or 5 divise 2 005, mais 3 ne le divise pas. Donc $\text{pgcd}(U_{2\,005},\ U_5) = U_5$ (d'après la question précédente).
$U_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$.
Conclusion : $\text{pgcd}(U_{2\,005},\ U_5) = 31$.

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. V (voir 2)
2. V car $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times \dfrac{1}{2}$
3. V car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$ (par projection sur le plan (ABC))
4. F, car $\tan\widehat{BIC} = \dfrac{1}{0.5} = 2 \neq \tan\dfrac{\pi}{3}$.
5. F : une équation paramétrique de la droit (IJ) est $\left\{\begin{array}{lll} x & = & \dfrac{1}{2}+t \\ y & = & 2t \\ z & = & t \end{array}\right.$
6. V en écrivant une équation de la droite (J, $\overrightarrow{JI}$).
7. F : c'est une équation de plan.
8. F
9. V : une équation du plan (FIJ)est : $4x - y - 2z = 2$.
10. V : en prenant la base (EFI) et la hauteur CB, on a $\mathscr{A}(\text{EFI}) = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Donc $\text{V(EFIJ)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$, ce qui permet de distinguer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. $f(-x) = \text{e}^{-(-x)^2} = \text{e}^{-x^2} = f(x)$; f étant définie sur un intervalle symétrique autour de 0 est donc paire.
$g(-x) = (-x)^2\text{e}^{-(-x)^2} = x^2\text{e}^{-x^2} = g(x)$; pour les mêmes raisons la fonction g est paire.
3. Dérivée : $f'(x) = -2x\text{e}^{-x^2}$ qui est signe de $-x$: donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
En posant $x^2 = X$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
De même pour g, $g'(x) = \text{e}^{-x^2}\left(2x - 2x^3\right) = 2x\text{e}^{-x^2}\left(1 - x^2\right)$, qui est du signe de

$x\left(1-x^2\right)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$, donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. La limite est identique au voisinage de $-\infty$.

On obtient les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	0	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	0
g'		$+$	0	-	0	$+$	0	-	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

4. Soit $d(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-x^2\right)$ qui est du signe de $1-x^2$, donc positive sur $[-1~;~1]$, négative ailleurs. Conclusion :
- Sur $[-1~;~1]$, $f(x)\geqslant g(x)$, donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$;
- Sur $]-\infty~;~-1[\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$.

Partie B

1. f étant dérivable donc continue, G est la primitive de la fonction g qui s'annule en 0.

2. Pour $x>$, $G(x)$ représente en unités d'aire, l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations, $X=0$ et $X=x$.

3. On a par définition $G'(x)=g(x)$ et d'après la question 3 de la partie A, $g(x)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction G est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Les fonctions t et $t\mathrm{e}^{-t^2}$ étant dérivables, on peut intégrer $G(x)$ par parties.

Posons $\left\{\begin{array}{ll} u=-\dfrac{t}{2} & \mathrm{d}v=-2t\mathrm{e}^{-t^2}\\ \mathrm{d}u=-\dfrac{1}{2} & v=\mathrm{e}^{-t^2}\end{array}\right.$

D'où $G(x)=\left[-\dfrac{t}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=-\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+\dfrac{1}{2}F(x)$, d'où enfin

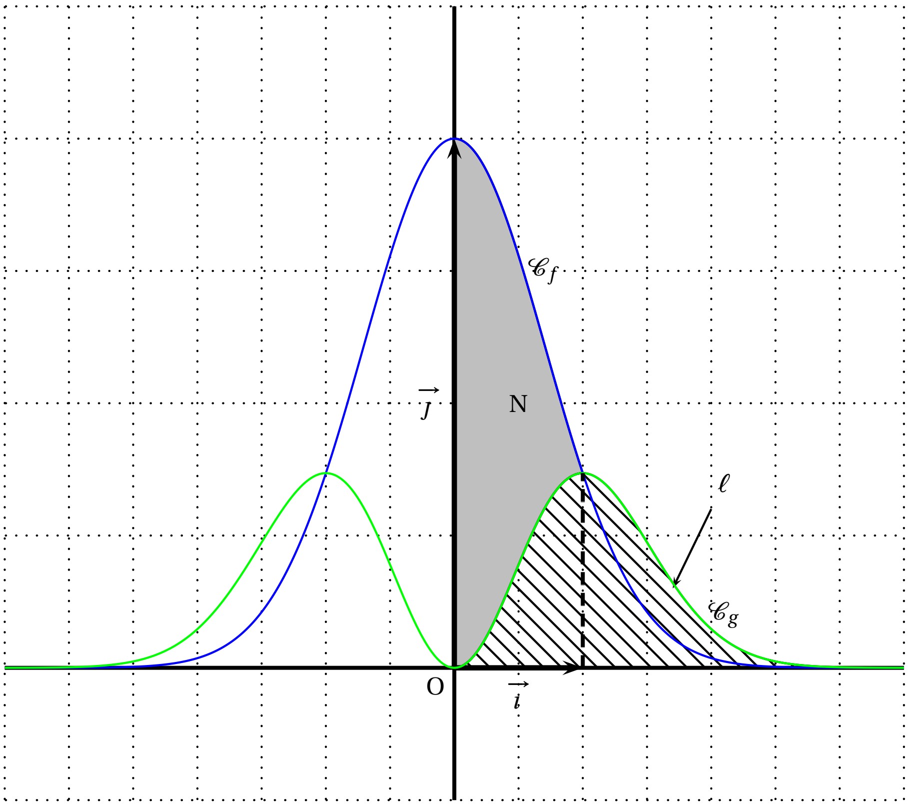
$G(x)=\dfrac{1}{2}\left[F(x)-x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$.

5. **a.** Soit $\ell=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$. Toutes les fonctions de l'égalité précédente étant continues, on peut en déduire à la limite que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=\frac{\ell}{2}$.

b. $\mathrm{N}=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=F(1)-G(1)$.

N représente donc l'aire de la surface limitée par les droites $x=0$, $x=1$, et les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

c. N est l'aire de la surface en gris clair et ℓ est l'aire de la surface hachurée. On voit graphiquement que $\mathrm{N}>\dfrac{\ell}{2}$.


$\mathscr{C}_f$
$\vec{j}$
N
ℓ
$\mathscr{C}_g$
O
$\vec{i}$