

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2005

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a une loi de Bernoulli de paramètres $p = 0,02$ et $n = 50$.
On a donc $p(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0,02^2 \times 0,98^{48} \approx 0,1858 \approx 0,19$.
2. La probabilité cherchée est $p(X > 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,98^{50} \approx 0,635 \approx 0,64$.
3. On a $E(X) = n \times p = 50 \times 0,02 = 1$.

Partie B

1. a. On a $P([1\ 000 ; +\infty]) = 1 - \int_0^{1000} 5 \times 10^{-4} e^{10^{-4}t} dt = 1 + \left[e^{-5 \times 10^{-4}t} \right]_0^{1000} = e^{-5 \times 10^{-4} \times 10^3} = e^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,606 \approx 0,61$.

b. Même calcul avec $\lambda_2 : P([1\ 000 ; +\infty]) = 1 - \int_0^{1000} 10^{-4} e^{10^{-4}t} dt = 1 + \left[e^{-10^{-4}t} \right]_0^{1000} = e^{-10^{-4} \times 10^3} = e^{-0,1} \approx 0,904 \approx 0,90$.

0,02 $\left. \begin{array}{l} P(T \geq t) = 1 - \int_0^t 5 \times 10^{-4} e^{-5 \times 10^{-4}t} dt = 0,02e^{-5 \times 10^{-4}t} \end{array} \right\}$

0,98 $\left. \begin{array}{l} P(T \geq t) = 1 - \int_0^t 10^{-4} e^{-10^{-4}t} dt = 0,98e^{-10^{-4}t} \end{array} \right\}$

D'où en faisant la somme, le résultat demandé.

3. On a $P_{T \geq 1000}(\text{défectueux}) = \frac{P[(T \geq 1000) \cap P(\text{défectueux})]}{P(T \geq 1000)} = \frac{0,02 \times e^{-0,5}}{0,02 \times e^{-0,5} + 0,98 \times e^{-10^{-1}}} \approx 0,013 \approx 0,01$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Un point $M(z)$ est invariant si et seulement si $z' = z = \frac{4}{z} \iff z\bar{z} = 4 \iff |z|^2 = 4 \iff |z| = 2$.
Les points invariants sont donc tous les points dont l'affixe a pour module 2 ; le cercle de centre O et de rayon 2 est donc invariant par f .
2. On a $z' = 1 = \frac{4}{z} \iff \bar{z} = 4 \iff z = 4$.
Le seul point dont l'image par f est J est le point d'affixe 4.
3. Si $\alpha = a + ib \neq 0$ a un antécédent z par f , alors $a + ib = \frac{4}{x + iy} \iff (a + ib)(x + iy) = 4 \iff \begin{cases} ax + by = 4 \\ bx - ay = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4a}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{4b}{a^2 + b^2} \end{cases}$
Conclusion : le seul antécédent de α par f est le complexe $z = \frac{4\alpha}{|\alpha|^2}$.

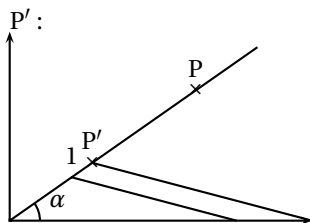
4. a. On a d'après la définition de f et en prenant les arguments :
 $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 0 - \text{def} t[-(\vec{u}, \overrightarrow{OM})] = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$; donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$
 modulo 2π . Autrement dit : les points O , M et M' sont alignés.

b. On a $|z'| = \left| \frac{4}{\bar{z}} \right| = \frac{4}{|\bar{z}|} = \frac{4}{|z|}$.

Donc si $|z| = r > 0$, alors $|z'| = \frac{4}{r}$.

L'image du cercle de centre O et de rayon r est donc le cercle de centre O et de rayon $\frac{4}{r}$. D'après la question précédente à chaque point du premier cercle correspond un point image aligné avec O : conclusion, l'image du cercle est tout le cercle de centre O et de rayon $\frac{4}{r}$.

c. Si $OP = 3$, $z_P = 3e^{i\alpha}$ et $z_{P'} = \frac{4}{3}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. D'où une construction de



5. Si $M(z) \in \mathcal{C}_1(J; r = 1)$, alors $z = 1 + e^{i\alpha}$, $\alpha \neq \pi$, d'où $z' = \frac{4}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha} = \frac{4(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)}{1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{4(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)}{2 + 2 \cos \alpha} = 2 + i \frac{2 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.
 Conclusion : le point M' a une abscisse égale à 2. Il appartient à la droite (D) d'équation $x = 2$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On sait que l'écriture de la similitude s est $z' = \alpha z + \beta$, avec α et β complexes.
 Or $s(A) = B$ et $s(C) = D$ se traduit par :

$$\begin{cases} 1 + 2i = \alpha i + \beta \\ 3 + 2i = \alpha \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \alpha \\ 1 + 2i = 2 + b \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \alpha \\ 1 = \beta \end{cases}$$

L'écriture complexe de s est donc : $z' = 2z + 1$.

On trouve aussitôt que le seul point fixe est le point d'affixe -1 , donc le centre de cette similitude.

$z' = 2z + 1 \iff z' + 1 = 2z + 2 \iff z' + 1 = 2(z + 1)$. On reconnaît une homothétie dont le centre est le point d'affixe -1 et de rapport 2.

2. On peut écrire $1U_{n+1} - 2U_n = 1$ ce qui montre d'après le théorème de Bezout que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

3. s étant une homothétie de rapport 2, les termes (naturels) de la suite sont les affixes des points obtenus successivement en prenant les symétriques du point d'affixe -1 autour du point précédent.

4. Démonstration par récurrence :

Initialisation : $U_0 = 2^0 - 1 = 0$: vrai.

Hérédité : supposons que la relation soit vraie pour le naturel n : $U_n = 2^n - 1$.

Alors $U_{n+1} = 2U_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. La relation est vraie au rang $(n + 1)$. Elle est donc vraie pour tout naturel n .

5. Calculons $U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p} = (2^p - 1)(2^{n-p} - 1 + 1) + 2^{n-p} = 2^n - 2^{n-p} + 2^{n-p} - 1 = 2^n - 1 = U_n$.

L'égalité précédente peut s'écrire : $U_n - U_p(U_{n-p} + 1) = U_{n-p}$.

Le pgcd à U_n et U_p , divise U_p , donc aussi $U_p(U_{n-p} + 1)$ et par différence divise $U_n - U_p(U_{n-p} + 1)$ c'est-à-dire U_{n-p} et c'est le plus grand diviseur commun. Donc $\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p})$.

6. On sait que pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{N}$, $x^a - 1 = (x - 1)(\dots)$, donc $x - 1$ divise $x^a - 1$. Soit d le pgcd de U_n et U_p . Il existe donc deux naturels k et k' premiers entre eux tels que $n = kd$ et $p = k'd$.

De plus il n'existe pas d'autre écriture de n et p sous forme de produit avec un facteur commun supérieur à d , d'après la définition du pgcd.

$U_n = 2^n - 1 = 2^{kd} - 1 = (2^d)^k - 1 = (2^d - 1)(\dots)$, c'est-à-dire que $2^d - 1$ divise U_n .

De même $U_p = 2^p - 1 = 2^{k'd} - 1 = (2^d)^{k'} - 1 = (2^d - 1)(\dots)$, c'est-à-dire que $2^d - 1$ divise U_p .

Donc $2^d - 1 = U_d = U_{\text{pgcd}(n, p)}$ est le plus grand diviseur commun à U_n et U_p .

Application : $15 = 3 \times 5$. Or 5 divise 2 005, mais 3 ne le divise pas. Donc

$\text{pgcd}(U_{2\,005}, U_5) = U_5$ (d'après la question précédente).

$U_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$.

Conclusion : $\text{pgcd}(U_{2\,005}, U_5) = 31$.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. V (voir 2)

2. V car $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times \frac{1}{2}$

3. V car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$ (par projection sur le plan (ABC))

4. F, car $\tan \widehat{BIC} = \frac{1}{0.5} = 2 \neq \tan \frac{\pi}{3}$.

5. F : une équation paramétrique de la droite (II) est
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

6. V en écrivant une équation de la droite (J, \overrightarrow{JI}).

7. F : c'est une équation de plan.

8. F

9. V : une équation du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z = 2$.

10. V : en prenant la base (EFI) et la hauteur CB, on a $\mathcal{A}(EFI) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Donc $V(EFIJ) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$, ce qui permet de distinguer \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

2. $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$; f étant définie sur un intervalle symétrique autour de 0 est donc paire.

$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$; pour les mêmes raisons la fonction g est paire.

3. Dérivée : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ qui est signe de $-x$: donc f est croissante sur \mathbb{R}_- et décroissante sur \mathbb{R}_+ .

En posant $x^2 = X$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

De même pour g , $g'(x) = e^{-x^2} (2x - 2x^3) = 2xe^{-x^2} (1 - x^2)$, qui est du signe de

$$x(1-x^2).$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. La limite est identique au voisinage de $-\infty$.

On obtient les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'		+	+	0	-
f				1	
	0				0
g'		+	0	-	0
			$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{e}$
g					
	0		0		0

4. Soit $d(x) = f(x) - g(x) = e^{-x^2}(1-x^2)$ qui est du signe de $1-x^2$, donc positive sur $[-1; 1]$, négative ailleurs. Conclusion :
- Sur $[-1; 1]$, $f(x) \geq g(x)$, donc \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g ;
 - Sur $]-\infty; -1[$ et $1] ; +\infty[$, $f(x) < g(x)$, donc \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{C}_g .

Partie B

1. f étant dérivable donc continue, G est la primitive de la fonction g qui s'anule en 0.
2. Pour $x > 0$, $G(x)$ représente en unités d'aire, l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_g et les droites d'équations, $X = 0$ et $X = x$.
3. On a par définition $G'(x) = g(x)$ et d'après la question 3 de la partie A, $g(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} . La fonction G est donc croissante sur \mathbb{R} .
4. Les fonctions t et te^{-t^2} étant dérivables, on peut intégrer $G(x)$ par parties.

$$\text{Posons } \begin{cases} u = -\frac{t}{2} & dv = -2te^{-t^2} \\ du = -\frac{1}{2} & v = e^{-t^2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } G(x) = \left[-\frac{t}{2}e^{-t^2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt = -\frac{x}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}F(x), \text{ d'où enfin}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[F(x) - xe^{-x^2} \right].$$

5. a. Soit $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Toutes les fonctions de l'égalité précédente étant continues, on peut en déduire à la limite que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{\ell}{2}$.
- b. $N = \int_0^1 e^{-t^2} dt - \int_0^1 t^2 e^{-t^2} dt = F(1) - G(1)$.
 N représente donc l'aire de la surface limitée par les droites $x = 0$, $x = 1$, et les deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g
- c. N est l'aire de la surface en gris clair et ℓ est l'aire de la surface hachurée.
 On voit graphiquement que $N > \frac{\ell}{2}$.

