

∞ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry ∞
mars 2005

EXERCICE 1

1.
 - a. Sur $[1 ; +\infty[$ la fonction exponentielle et la fonction $t \mapsto t$ sont continues et la seconde ne s'annule pas sur $[1 ; +\infty[$, leur quotient est continu.
 - b. La fonction f est de la forme : $f = \frac{u}{v}$ où $u(t) = e^t$, $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables et la seconde ne s'annule pas sur $[1 ; +\infty[$, donc f est dérivable et sur $[1 ; +\infty[$, $f'(t) = \frac{e^t \times t - e^t}{t^2} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}$. L'exponentielle et la fonction carré sont strictement positives sur $[1 ; +\infty[$, donc le signe de f' est, celui de $t-1$. Donc sur $[1 ; +\infty[$, on a $f'(t) \geq 0$. Conclusion : la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.
2. Restitution organisée de connaissances

- a. $\mathcal{A}(1)$ est l'aire (exprimée en u.a.) du domaine délimité par la courbe (\mathcal{C}) représentant f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{A}(1) = 0$.
- b. Soit x_0 tel que $1 \leq x_0$. La fonction f étant croissante sur $[1 ; +\infty[$, on a $f(x_0) < f(x_0 + h)$. L'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$ est supérieure à l'aire de la surface (rectangle) limitée par la droite d'équation $y = f(x_0)$ et inférieure à l'aire de la surface (rectangle) limitée par la droite d'équation $y = f(x_0 + h)$. On a donc :

$$f(x_0)h < \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) < f(x_0 + h)h.$$

D'où par division par $h > 0$, le résultat :

$$f(x_0) < \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} < f(x_0 + h)$$

- c. Avec $1 < x_0$, $h < 0$ et $1 \leq x_0 + h \leq x_0$. La fonction f étant croissante pour $x \geq 1$, on a $f(x_0 + h) < f(x_0)$. On encadre de la même façon l'aire limitée par la courbe par l'aire des deux rectangles. On a donc

$$f(x_0 + h) \times (-h) < \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h) < f(x_0) \times (-h)$$

et par division par $-h$ qui est positif :

$$f(x_0 + h) < \frac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)}{-h} < f(x_0)$$

- d. D'après la continuité de f en x_0 , on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Donc d'après le théorème des « gendarmes », le taux d'accroissement de la fonction \mathcal{A} admet pour limite $f(x_0)$ en x_0 . Cette fonction \mathcal{A} est donc dérivable en $x_0 > 1$ et $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.
- e. Le raisonnement fait ci-dessus est vrai pour tout $x_0 > 1$. Donc la fonction \mathcal{A} est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et $\mathcal{A}' = f$.

EXERCICE 2

1. Le centre Ω du cercle (\mathcal{C}) est le milieu du diamètre $[AB]$. Son affixe est donc $z_\Omega = \frac{1 - 2i - 2 + 2i}{2} = -\frac{1}{2}$.

Le centre Ω du cercle (\mathcal{C}) a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

De plus $AB^2 = (-3)^2 + 4^2 = 5^2$. Donc $R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$.

$$2. \text{ On a } z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{30+30i}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Calcul de la distance $\Omega D = |z_D - z_\Omega| = \left|\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right| = \left|2 + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} = R$.

Donc D est bien un point du cercle (\mathcal{C}) .

$$3. \text{ a. Par hypothèse } \arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ et comme } E \in (\mathcal{C}) \left|z_E + \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}.$$

$$\text{b. Donc } z_E + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z_E = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

$$4. \text{ a. } z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\frac{\pi}{4}}\overrightarrow{\Omega M}. \text{ Donc } r \text{ est une rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } +\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{b. Avec } z = 2, \text{ on a } z_{K'} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff z_{K'} = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4} = z_E.$$

Géométriquement : K est un point de (\mathcal{C}) car $\Omega K = \frac{5}{2}$. Son image est donc

un point de (\mathcal{C}) telle que $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega K'}) = \frac{\pi}{4}$: c'est donc le point E.

EXERCICE 2 DE SPÉCIALITÉ

$$1. z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5} \iff x'+iy' = \frac{3+4i}{5}(x-iy) + \frac{1-2i}{5} = \frac{3x+4y+1+i(4x-3y-2)}{5}.$$

Par identification :

$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

$$2. \text{ a. } M \text{ est invariant si et seulement si } \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-4y-1 = 0 \\ 4x-8y-2 = 0 \end{cases} \iff 2x-4y-1 = 0. \text{ Conclusion : les points}$$

M invariants appartiennent à la droite d'équation $2x-4y-1=0$.

b. L'application f a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a|=1$: c'est donc une symétrie axiale d'axe la droite d'équation $2x-4y-1=0$.

3. Le complexe z' est réel si et seulement si $y' = 0 \iff 4x-3y-2=0$. L'ensemble D est donc la droite d'équation $4x-3y-2=0$.

4. a. Le couple $(2; 2) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie l'équation $4x-3y-2=0$.

b. Si $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution quelconque de l'équation $4x-3y-2=0$, alors

$$\begin{cases} 4x-3y-2 = 0 \\ 4 \times 2 - 3 \times 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

d'où par différence $4(x-2) - 3(y-2) = 0 \iff 4(x-2) = 3(y-2)$ (1).

Donc 3 divise $4(x-2)$ mais étant premier avec 4, divise $x-2$, d'après le théorème de Gauss. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-2 = 3k \iff x = 3k+2$.

En reportant dans (1) on obtient $4k = y-2 \iff y = 4k+2$.

Inversement $4(3k+2) - 3(4k+2) - 2 = 12k+8 - 12k-6-2 = 0$; donc les couples $(3k+2; 4k+2)$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les couples solutions de l'équation $4x-3y-2=0$.

$$5. \text{ Si } x=1, x' \text{ et } y' \text{ sont des entiers } \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+1 \equiv 0 \pmod{5} \\ 4x-3y-2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y+4 \equiv 0 \pmod{5} \\ 2-3y \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} \Leftrightarrow y+6 \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow y \equiv -1 \pmod{5} \Leftrightarrow y \equiv 4 \pmod{5} \Leftrightarrow y=5k+4.$$

Inversement, si $x=1$ et $y=5k+4$, alors $x' = \frac{4+4(5k+4)}{5} = \frac{20k+20}{5} = 4k+4 \in \mathbb{Z}$ et $y' = \frac{2-3(5k+4)}{5} = \frac{-15k-10}{5} \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 3

1. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Conclusion A, B et C ne sont pas alignés.

b. On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0+4-4=0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -6+4+2=0$. Donc \vec{n} normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan. On a donc $M(x; y; z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x-34y-2z+1=0 \Leftrightarrow 3x+4y-2z+1=0 \Leftrightarrow M(x; y; z) \in (ABC)$.

2. a. Les plans P_1 et P_2 ont respectivement pour vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les plans ne sont pas parallèles donc sécants en une droite D dont les coordonnées de chaque point vérifient les système :

$$\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2z-1 \\ x-2y=-6z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=-2z-2 \\ x-2y=-6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y+2=-4z-4 \\ x-2y=-6z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x=-10z-6 \\ x-2y=-6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z-\frac{6}{5} \\ x-2y=-6z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z-\frac{6}{5} \\ x-2y=-6z \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z-\frac{6}{5} \\ y=2z-\frac{1}{5} \\ z=z \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'une droite contenant le point $(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; 0)$ et

de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or $\vec{u} \cdot \vec{n} = -2 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times (-2) = 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux, donc la droite (D) est parallèle au plan (ABC). Comme

$3 \times (-\frac{2}{5}) + 4 \times (-\frac{1}{5}) - 2 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$ est faux, la droite et le plan sont parallèles et distincts.

3. a. $t \geq 0 \iff t+3 \geq 3 > 0$. La somme des coefficients est non nulle, donc G existe.
On a d'une part $\vec{GA} + 2\vec{GB} + t\vec{GC} = \vec{0}$ et d'autre part $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$. La relation de Chasles appliquée à la première égalité donne $\vec{GI} + \vec{IA} + 2\vec{GI} + 2\vec{IB} + t\vec{GI} + t\vec{IC} = \vec{0} \iff (3+t)\vec{GI} + t\vec{IC} = \vec{0} \iff \vec{IG} = \frac{t}{3+t}\vec{IC}$.
- b. L'égalité vectorielle précédente obtenue montre que le point G appartient à la droite (IC) et que l'abscisse du point G pour le repère (I, C) est le réel $\frac{t}{3+t}$.
- Soit f la fonction réelle de la variable t définie par $f(t) = \frac{t}{3+t}$ sur \mathbb{R}^+ . On a $f'(t) = \frac{3}{(3+t)^2} > 0$. La fonction f est donc croissante de 0 à 1 (exclu car limite en plus l'infini de $f(t)$ qui sont respectivement les abscisses de I et de C. L'ensemble des points G est donc le segment ouvert [IC[.
- On a $G = J \iff f(t) = \frac{1}{2} \iff \frac{t}{3+t} = \frac{1}{2} \iff 2t = 3+t \iff t = 3$.

EXERCICE 4

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} \leq 0,95u_n \iff \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0,95 \frac{n^{10}}{2^n}$
 $\iff (n+1)^{10} \leq 1,9n^{10} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \leq 1,9 \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.
2. a. La fonction $1 + \frac{1}{x}$ étant dérivable sur $[1; +\infty[$, la fonction f l'est aussi et
 $f'(x) = 10\left(1 + \frac{1}{x}\right)^9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0$.
- Donc f est décroissante sur $[1; +\infty[$. On a $f(1) = 2^{10}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$,
d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10} = 1$.
- b. Conclusion f est continue (car dérivable) et décroissante de 2^{10} à 1, donc bijective. Il existe donc un unique réel α de $[1; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1,9$.
- c. Avec la calculatrice on trouve que $f(15) > 1,9$ et $f(16) < 1,9$. Donc $n_0 = 16$.
- d. On a $n \geq 16 \geq \alpha \Rightarrow f(n) \leq f(16) \leq f(\alpha)$ soit $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$.
3. a. D'après la question 1. et pour tout entier n supérieur à 16
 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9 \iff u_{n+1} \leq 0,95u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 16.
- b. Comme de plus $u_n \geq 0$ la suite (u_n) converge vers un réel supérieur ou égal à zéro.
4. • Initialisation : on a $u_{16} \leq 0,95^0 u_{16}$.
• Hérité : hypothèse $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}$. D'après la question 1.
 $0 \leq u_{n+1} \leq 0,95u_n \leq 0,95 \times 0,95^{n-16} u_{16} \iff 0 \leq u_{n+1} \leq 0,95^{n-15} u_{16}$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. On a donc pour tout naturel n supérieur ou égal à 16 : $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}$.
Or $0,95^{n-16}$ est le terme général d'une suite géométrique de raison telle que $-1 < 0,95 < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^{n-16} = 0$. D'après l'encadrement démontré par récurrence et d'après le théorème des « gendarmes »

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$