Corrigé du baccalauréat S Pondichéry mars 2005

EXERCICE 1

1. **a.** Sur $[1\ ;\ +\infty[$ la fonction exponentielle et la fonction $t \mapsto t$ sont continues et la seconde ne s'annulant pas sur $[1\ ;\ +\infty[$, leur quotient est continu.

   b. La fonction f est de la forme : $f = \dfrac{u}{v}$ où $u(t) = \mathrm{e}^t$, $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables et la seconde ne s'annule pas sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable et sur $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t \times t - \mathrm{e}^t}{t^2} = \dfrac{\mathrm{e}^t(t-1)}{t^2}$. L'exponentielle et la fonction carré sont strictement positives sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc le signe de f' est, celui de $t-1$. Donc sur $[1\ ;\ +\infty[$, on a $f'(t) \geqslant 0$. Conclusion : la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

   a. $\mathscr{A}(1)$ est l'aire (exprimée en u.a.) du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = 1$. Donc $\mathscr{A}(1) = 0$.

   b. Soit x_0 tel que $1 \leqslant x_0$. La fonction f étant croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, on a $f(x_0) < f(x_0 + h)$. L'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$ est supérieure à l'aire de la surface (rectangle) limitée par la droite d'équation $y = f(x_0)$ et inférieure à l'aire de la surface (rectangle) limitée par la droite d'équation $y = f(x_0 + h)$. On a donc :

   $$f(x_0)h < \mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) < f(x_0 + h).$$

   D'où par division par $h > 0$, le résultat :

   $$f(x_0 < \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} < f(x_0 + h)$$

   c. Avec $1 < x_0$, $h < 0$ et $1 \leqslant x_0 + h \leqslant x_0$. La fonction f étant croissante pour $x \geqslant 1$, on a $f(x_0 + h) < f(x_0)$. On encadre de la même façon l'aire limitée par la courbe par l'aire des deux rectangles. On a donc

   $$f(x_0 + h) \times (-h) < \mathscr{A}(x_0 - \mathscr{A}(x_0 + h) < f(x_0 \times (-h)$$

   et par division par $-h$ qui est positif :

   $$f(x_0 + h) < \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} < f(x_0)$$

   d. D'après la continuité de f en x_0, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0$. Donc d'après le théorème des « gendarmes », le taux d'accroissement de la fonction $\mathscr{A}$ admet pour limite $f(x_0)$ en x_0. Cette fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable en $x_0 > 1$ et $\mathscr{A}'(x_0) = f(x_0)$.

   e. Le raisonnement fait ci-dessus est vrai pour tout $x_0 > 1$. Donc la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et $\mathscr{A}' = f$.

EXERCICE 2

1. Le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ est le milieu du diamètre [AB]. Son affixe est donc $z_\Omega = \dfrac{1 - 2\mathrm{i} - 2 + 2\mathrm{i}}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

De plus $AB^2 = (-3)^2 + 4^2 = 5^2$. Donc $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2}$.

2. On a $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i} = \dfrac{(3+9i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \dfrac{30+30i}{20} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

Calcul de la distance $\Omega D = |z_D - z_\Omega| = \left|\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i + \dfrac{1}{2}\right| = \left|2 + \dfrac{3}{2}i\right| = \sqrt{4 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{5}{2} = R$.
Donc D est bien un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3. a. Par hypothèse $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et comme $E \in (\mathscr{C})$ $\left|z_E + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$.

b. Donc $z_E + \dfrac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z_E = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$.

4. a. $z' + \dfrac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \dfrac{1}{2}\right) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\frac{\pi}{4}}\overrightarrow{\Omega M}$. Donc r est une rotation de centre Ω et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

b. Avec $z = 2$, on a $z_{K'} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff z_{K'} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\dfrac{5\sqrt{2}}{4} = z_E$.

Géométriquement : K est un point de $(\mathscr{C})$ car $\Omega K = \dfrac{5}{2}$. Son image est donc un point de $(\mathscr{C})$ telle que $\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega K'}\right) = \dfrac{\pi}{4}$: c'est donc le point E.

EXERCICE 2 DE SPÉCIALITÉ

1. $z' = \dfrac{3+4i}{5}\overline{z} + \dfrac{1-2i}{5} \iff x' + iy' = \dfrac{3+4i}{5}(x - iy) + \dfrac{1-2i}{5} = \dfrac{3x+4y+1+i(4x-3y-2)}{5}$.
Par identification :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' & = & \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{array}\right.$$

2. a. M est invariant si et seulement si $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y & = & \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x-4y-1 & = & 0 \\ 4x-8y-2 & = & 0 \end{array}\right. \iff 2x - 4y - 1 = 0$. Conclusion : les points M invariants appartiennent à la droite d'équation $2x - 4y - 1 = 0$.

b. L'application f a une écriture complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$: c'est donc une symétrie axiale d'axe la droite d'équation $2x - 4y - 1 = 0$.

3. Le complexe z' est réel si et seulement si $y' = 0 \iff 4x - 3y - 2 = 0$. L'ensemble D est donc la droite d'équation $4x - 3y - 2 = 0$.

4. a. Le couple $(2\ ;\ 2) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie l'équation $4x - 3y - 2 = 0$.

b. Si $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution quelconque de l'équation $4x - 3y - 2 = 0$, alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4x-3y-2 & = & 0 \\ 4\times 2 - 3\times 2 - 2 & = & 0 \end{array}\right.,$$

d'où par différence $4(x-2) - 3(y-2) = 0 \iff 4(x-2) = 3(y-2)$ (1).
Donc 3 divise $4(x-2)$ mais étant premier avec 4, divise $x-2$, d'après le théorème de Gauss. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2 = 3k \iff x = 3k+2$.
En reportant dans (1) on obtient $4k = y - 2 \iff y = 4k + 2$.

Inversement $4(3k+2)-3(4k+2)-2=12k+8-12k-6-2=0$; donc les couples $(3k+2\ ;\ 4k+2)$, $k\in\mathbb{Z}$ sont les couples solutions de l'équation $4x-3y-2=0$.

5. Si $x=1$, x' et y' sont des entiers $\iff \left\{\begin{array}{lcll} 3x+4y+1 & \equiv & 0 & \bmod 5\\ 4x-3y-2 & \equiv & 0 & \bmod 5\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcll} 4y+4 & \equiv & 0 & \bmod 5\\ 2-3y & \equiv & 0 & \bmod 5\end{array}\right. \longleftrightarrow y+6\equiv 0 \quad \bmod 5 \iff y\equiv -1 \quad \bmod 5 \iff$ $y\equiv 4 \quad \bmod 5 \iff y=5k+4$.

Inversement, si $x=1$ et $y=5k+4$, alors $x'=\dfrac{4+4(5k+4)}{5}=\dfrac{20k+20}{5}=$ $4k+4\in\mathbb{Z}$et $y'=\dfrac{2-3(5k+4)}{5}=\dfrac{-15k-10}{5}\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 3

1. a. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Conclusion A, B et C ne sont pas alignés.

b. On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0+4-4=0$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ $=-6+4+2=0$. Donc $\overrightarrow{n}$ normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan. On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in$ (ABC) $\iff \overrightarrow{\text{A}M}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0 \iff 3x-34y-2z+1=0 \iff$
$3x+4y-2z+1=0 \iff M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in$ (ABC).

2. a. Les plans P_1 et P_2 ont respectivement pour vecteurs normaux $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$. les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les plans ne sont pas parallèles donc sécants en une droite D dont les coordonnées de chaque point vérifient les système :

$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+2z+1 & = & 0\\ x-2y+6z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x+y & = & -2z-1\\ x-2y & = & -6z\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+ & = & -2t-1\\ x-2y & = & -6t\\ z & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4x+2y & = & -4t-2\\ x-2y & = & -6t\\ z & = & t\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 5x & = & -10t-2\\ x-2y & = & -6t\\ z & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2t-\dfrac{2}{5}\\ y & = & 2t-\dfrac{1}{5}\\ z & = & t\end{array}\right.$

On reconnait l'équation d'une droite contenant le point $\left(-\dfrac{2}{5}\ ;\ -\dfrac{1}{5}\ ;\ 0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=-2\times 3+2\times 4+1\times(-2)=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, donc la droite (D) est parallèle au plan (ABC). Comme $3\times\left(-\dfrac{2}{5}\right)+4\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)-2\times 0+1=0 \iff -1=0$ est faux, la droite et le plan sont parallèles et distincts.

3. **a.** $t \geqslant 0 \iff t+3 \geqslant 3 > 0$. La somme des coefficients est non nulle, donc G existe.

On a d'une part $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + t\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et d'autre part $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. La relation de Chasles appliquéeà la première égalité donne $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IB} + t\overrightarrow{GI} + t\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \iff (3+t)\overrightarrow{GI} + t\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{IG} = \dfrac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.

b. L'égalité vectorielle précédente obtenue montre que le point G appartient à la droite (IC) et que l'abscisse du point G pour le repère (I, C) est le réel $\dfrac{t}{3+t}$.

Soit f la fonction réelle de la variable$t$ définie par $f(t) = \dfrac{t}{3+t}$ sur $\mathbb{R}^+$. On a $f'(t) = \dfrac{3}{(3+t)^2} > 0$. La fonction f est donc croissante de 0 à 1 (exclu car limite en plus l'infini de $f(t)$ qui sont respectivement les abscisses de I et de C. L'ensemble des points G est donc le segment ouvert [IC[.

On a $G = \text{J} \iff f(t) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{t}{3+t} = \dfrac{1}{2} \iff 2t = 3+t \iff t = 3$.

EXERCICE 4

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \iff \dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leqslant 0,95\dfrac{n^{10}}{2^n}$

$\iff (n+1)^{10} \leqslant 1,9n^{10} \iff \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \iff \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9$.

2. **a.** La fonction $1+\dfrac{1}{x}$ étant dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$, la fonction f l'est aussi et

$f'(x) = 10\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) < 0$.

Donc f est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. On a $f(1) = 2^{10}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10} = 1$.

b. Conclusion f est continue (car dérivable) et décroissante de 2^{10} à 1, donc bijective. Il existe donc un unique réel α de $[1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. Avec la calculatrice on trouve que $f(15) > 1,9$ et $f(16) < 1,9$. Donc $n_0 = 16$.

d. On a $n \geqslant 16 \geqslant \alpha \Rightarrow f(n) \leqslant f(16) \leqslant f(\alpha)$ soit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. **a.** D'après la question **1.** et pour tout entier n supérieur à 16

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \iff u_{n+1} \leqslant 0,95u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 16.

b. Comme de plus $u_n \geqslant 0$ la suite (u_n) converge vers un réel supérieur ou égal à zéro.

4. • Initialisation : on a $u_{16} \leqslant 0,95^0 u_{16}$.

• Hérédité : hypothèse $0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16}u_{16}$. D'après la question **1.**

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \leqslant 0,95 \times 0,95^{n-16}u_{16} \iff 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,95^{n-15}u_{16}$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. On a donc pour tout naturel n supérieur ou égal à 16 : $0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16}u_{16}$.

Or $0,95^{n-16}$ est le terme général d'une suite géométrique de raison telle que $-1 < 0,95 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^{n-16} = 0$. D'après l'encadrement démontré par récurrence et d'après le théorème des « gendarmes »

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$