Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

Exercice 1 **5 points**

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$

1. a. La fonction affine $1 - x$ est dérivable ; $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est le quotient de deux fonctions dérivable, la seconde ne s'annulant pas sur $]0~;~+\infty[$. f est donc dérivable sur cet intervalle et :
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} - 1 = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{2-\ln x - 2x\ln x}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{-[\ln x + 2(x\ln x - 1)]}{2x\sqrt{x}}$
Or $x\sqrt{x} > 0$ sur $]0~;~+\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $-[\ln x + 2(x\ln x - 1)] = N(x)$.

   b. $N(1) = 0$. Si $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$(par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$) et par produit $x\sqrt{x} > 1 \iff x\sqrt{x} - 1 > 0 \iff 2(x\sqrt{x} - 1) > 0$. De plus si $x > 1$, alors $\ln x > 0$ et par somme, puis opposé $N(x) < 0$.
Le même raisonnement avec $0 < x < 1$ conduit à $N(x) > 0$.

   c. Conclusion : la fonction f est croissante sur $]0~;~1]$ et décroissante sur $[1~;~+\infty[$. Le maximum de f est obtenu quand la dérivée s'annule en changeant de signe, donc en 1 et il vaut $f(1) = 0$. La fonction f est donc négative sur l'intervalle étudié.

2. a. D'après le résultat précédent $\mathcal{A}(\alpha) = -\displaystyle\int_{\alpha}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Pour la fonction quotient on intégre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = 2\ln x & v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ u'(x) = \dfrac{2}{x} & v(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

u et v étant dérivables et u' et v' continues, on peut intégrer par parties :
$\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \frac{2\ln x}{2\sqrt{x}} = \left[2\ln x\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1}\frac{2\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Or $\displaystyle\int_{\alpha}^{1}\frac{2\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{1}\frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[4\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1}$.
Finalement $\mathcal{A}(\alpha) = \left[2\ln x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + x - \dfrac{x^2}{2}\right]_{1}^{\alpha} = \alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} - 4\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha}\ln\alpha + \dfrac{7}{2}$.

   b. On sait que $\alpha > 0$. On peut donc poser $\alpha = \beta^2$ avec $\beta > 0$. Donc $\sqrt{\alpha}\ln\alpha = \sqrt{\beta^2}\ln\beta^2 = \beta \times 2\ln\beta$. La fonction carré étant continue, si α tend vers zéro, β aussi, et on sait que $\displaystyle\lim_{\beta\to 0}\beta\ln\beta = 0$. La limite des quatre premiers termes est nulle, donc finalement :

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathcal{A}(\alpha) = \frac{7}{2}.$$

Géométriquement, cette limite correspond à la mesure de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. On a $1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow \ln 1 \leqslant \ln x \leqslant \ln 2$ et
$1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{2} \iff \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 1$ et par produit :
$0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{2} < 1.$

b. Par récurrence : $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$. L'appartenance est vraie au rang zéro.
Hérédité : si $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, d'après le **a.** $0 \leqslant \dfrac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} \leqslant 1 \iff$
$1 \leqslant \dfrac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \leqslant 2 \iff 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
On a bien démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1\,;\,2]$.

4. Comme $u_{n+1} = f(u_n) + u_n \iff u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ et que l'on a démontré au **1. c.** que f est négative, on montre aussi que la suite (u_n) est décroissante.

5. **a.** La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $1 \leqslant \ell$.

b. Or par continuité de la fonction f dérivable, la relation $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ donne à la limite $\ell = f(\ell) + \ell \iff f(\ell) = 0$.
Or on a vu à la question 1. c. que la seule valeur qui annule f est le nombre 1. Conclusion $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 1$.

Exercice 2 — 5 points

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. **a.** $M'' = M \iff z^2 = z \iff z(z-1) = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$
Les points solutions sont donc l'origine et le point d'affixe 1.

b. $M'' = M' \iff z^2 = z - 2 \iff z^2 - z + 2 = 0$; $\Delta = -7 = \left(\mathrm{i}\sqrt{7}\right)^2$.
On trouve deux solutions : les points d'affixes $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.

2. z' est imaginaire si $x + \mathrm{i}y - 2$ est imaginaire, i.e. si $x = 2$.
z'' est imaginaire si $x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ est imaginaire, i.e. si $x^2 - y^2 = 0$ et compte-tenu de la condition précédente si $4 - y^2 = 0 \iff y = -2$ ou $y = 2$.
Il y a donc deux points $\mathrm{M}_1(2+2\mathrm{i})$ et $\mathrm{M}_2(2-2\mathrm{i})$ dont les images M' etM'' appartiennent à l'axe des ordonnées et les affixes de ces points sont conjuguées.

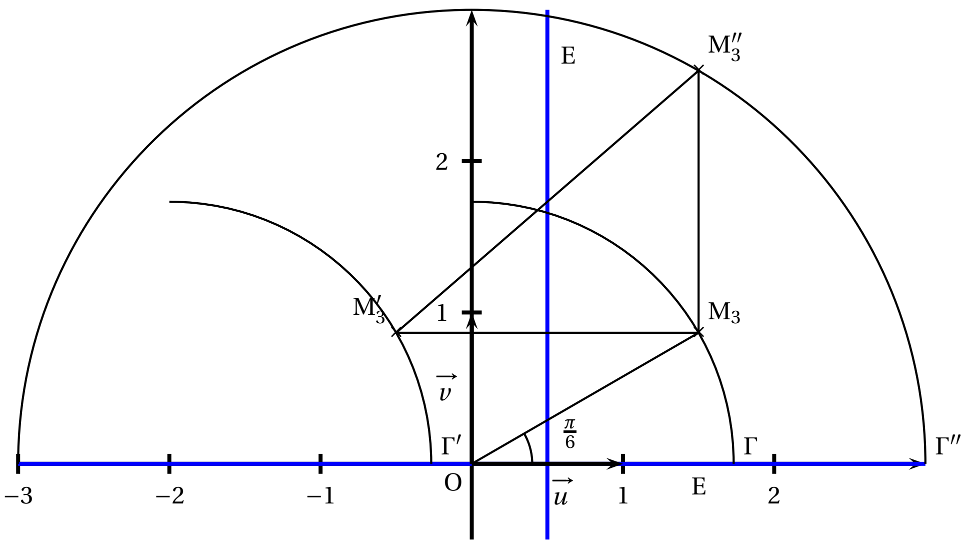
3. **a.** $\dfrac{z''-z}{z'-z} = \dfrac{z^2 - z}{z-2-z} = \dfrac{x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy - x - \mathrm{i}y}{-2}$.

b. Les points M, M' et M'' sont alignés si ce complexe est un réel, donc si $2xy - y = 0 \iff y(2x-1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.
$\mathrm{E} = \{M(z)$ avec $z = x$ ou $z = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}y,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

4. **a.** L'ensemble Γ des points M d'affixe $z = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ est le premier quart de cercle (dans le sens direct) de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.
L'ensemble Γ' des pointsM' correspondants est le quart de cercle translaté de Γ dans la translation de vecteur $-2\overrightarrow{u}$.
Les points M'' on pour affixes $z'' = z^2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}$. L'ensemble Γ'' des points M'' est donc le demi-cercle (direct) de centre O, de rayon 3.

b. Cf. figure

c. Avec $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $z_3 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$z_3' = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_3'' = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
M_3 et M_3' ont la même ordonnée ; la droite $(\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3')$ est donc horizontale ;
M_3 et M_3'' ont la même abscisse ; la droite (M_3M"3) est donc verticale et le triangle $\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3'\mathrm{M}_3''$ est donc rectangle en M_3.
$\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3'^{\,2} = 4$;
$\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3''^{\,2} = 3$;
$\mathrm{M}_3'\mathrm{M}_3''^{\,2} = 7$.
Donc le triangle n'est pas isocèle.



EXERCICE 2 **5 points**

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. **a.** $z_{A'} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -1 + i = z_A$.

$z_{C'} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(-i\sqrt{2}) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = i\sqrt{2} = z_C$.

b. La transformation f est une similitude indirecte qui conserve les deux points A et C : c'est donc une symétrie orthogonale d'axe la droite (AC).

c. $z_{B'} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(3-2i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = \dfrac{3}{2} + i\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$. Voir la figure.

2. $\overrightarrow{AM'} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ se traduit par $z' + 1 - i = \sqrt{2}(z + 1 - i)$, d'où $z' = z\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1-\sqrt{2})$.

3. On a $z'' = f[h(z)] = f[z\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1-\sqrt{2})] = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\left[\overline{z}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1+\sqrt{2})\right] - 1 + i(1+\sqrt{2}) = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$. C'est encore l'écriture d'une similitude indirecte.

4. **a.** En utilisant l'égalité précédente, on a $z_0'' = (1+i)(2+4i) - 1 + 3i = -3 + 9i$. $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(4 ; 1)$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ a pour composantes $(-2 ; 8)$. Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM_0''} = -8 + 8 = 0$, donc ces vecteurs sont orthogonaux, donc M_0'' appartient à la perpendiculaire à la droite (AB) contenant A.

b. Soient les points $M(z = x + iy)$ avec $x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$.

$z'' = (1+i)(x - iy) + 3i - 1 = x + y - 1 + i(x - y + 3)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM''} = 0 \iff 4(x+y) + 1(x - y + 2) = 4x + 4y + x - y + 2 = 0 \iff 5x + 3y = -2$.

c. Le couple $(-1 ; 1)$ est une solution évidente de cette équation. On a donc :

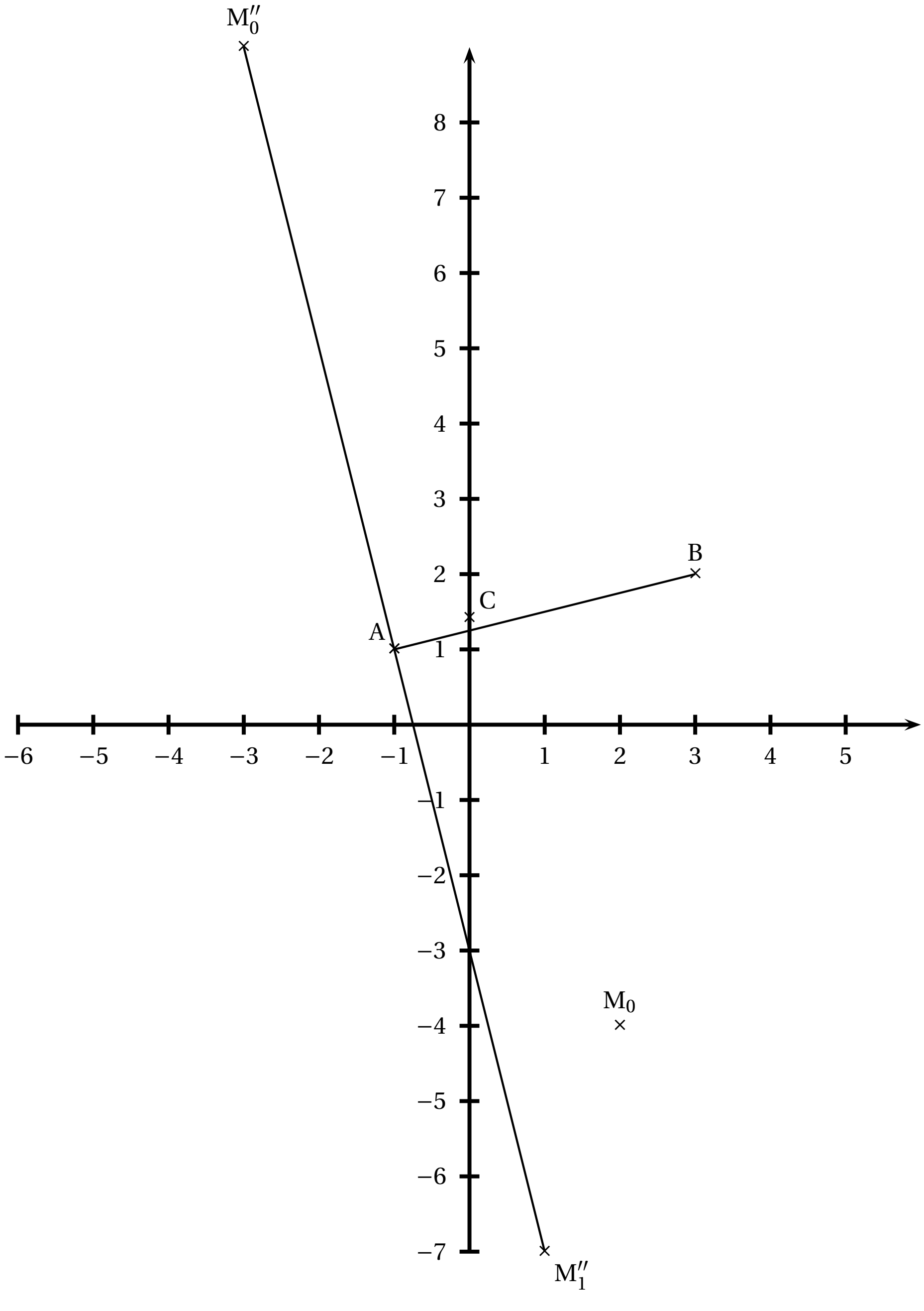
$\begin{cases} 5x + 3y & = & -2 \\ 5 \times (-1) + 3 \times 1 & = & -2 \end{cases} \Rightarrow 5(x+1) + 3(y-1) = 0 \iff 5(x+1) = 3(1-y)$.

3 divise $3(1-y)$, donc aussi $5(x+1)$; 3 étant premier avec 5 divise (Gauss) $1-y$. Il existe donc un entier k tel que $x + 1 = 3k \iff x = -1 + 3k$ et en reportant dans l'équation on obtient $y = 1 - 5k$.

Les couples d'entiers solutions sont tous les couples de la forme $(-1 + 3k ; 1 - 5k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

d. On a $-6 \leqslant y \leqslant 6 \iff -6 \leqslant 1 - 5k \leqslant 6 \iff -6 \leqslant 5k - 1 \leqslant 6 \iff -5 \leqslant 5k \leqslant 7 \iff -1 \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{5}$.

Seules conviennnent les valeurs -1, 0 et 1, qui donnent respectivement les couples de coordonnées $(-4~;~6)$, $(-1~;~1)$ et $(2~;~-4)$. Les points M$''$ correspondants ont pour coordonnées $(1~;~-7)$, $(-1~;~1)$ et $(-3~;~9)$ Le couple $(-1~;~1)$ correspond au point A. Il n'y a donc que deux solutions (on retrouve le point M''_0). Voir la figure.



EXERCICE 3 **5 points**

(Commun à tous les candidats)

1. La plus petite somme $a+b$ est égale à -3, soit $a+b>-4 \iff a+b+4>0$. La somme des coefficients est non nulle : le barycentre G existe quel que soit le tirage.
2. **a.** G appartient à la droite (BC) si et seulement si le coefficient de A, soit a est nul ; donc $p(\text{E}_1)=\dfrac{1}{6}$.
   G appartient au segment [BC] si et seulement si $a=0$ et si $b>0$; on a donc $p(\text{E}_2)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{15}$.

b. G est strictement intérieur au triangle si les trois coefficients sont supérieurs à zéro, donc si $a > 0$ et $b > 0$. On a donc $p(\text{E}_3) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5}$.

3. **a.** On sait que $\text{E}(X) = pn = \dfrac{2}{5} \times n = 4 \iff n = 10$.

b. La probabilité de n'avoir aucun barycentre intérieur au triangle est $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$, donc la probabilité d'en avoir au moins un est $1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$. Il faut donc que $1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \geqslant 0,999 \iff \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \leqslant 0,001 \iff n \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) \leqslant \ln 0,001 \iff$ $n \geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 13,5$.

Conclusion : il faut répéter l'expérience 14 fois.