

CORRECTION

Exercice 1 :

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

5 points

Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2+3})$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $+\infty$ <input checked="" type="checkbox"/> 0 <input type="checkbox"/> e^3
2. $e^{\ln(2)} + e - 4$ est égale à :	<input checked="" type="checkbox"/> $e - 2$ <input type="checkbox"/> $\ln(2) + e - 4$ <input type="checkbox"/> -2
3. $\ln(1-x) \geq 1$ est équivalente à :	<input checked="" type="checkbox"/> $x \leq 1 - e$ <input type="checkbox"/> $x < 0$ <input type="checkbox"/> $x > -e$
4. La fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) + 2$ a pour primitive la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par :	<input type="checkbox"/> $F(x) = x \cdot \ln(x)$ <input type="checkbox"/> $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$ <input checked="" type="checkbox"/> $F(x) = x \cdot \ln(x) + x$

Partie B

5. $P(\bar{A})$ est égale à :	<input checked="" type="checkbox"/> $(1-a)(1+a)$ <input type="checkbox"/> $a^2 - 1$ <input type="checkbox"/> $b^2 - a^2$
6. $P(A \cup B)$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $(a+b)^2$ <input checked="" type="checkbox"/> $(a-b)^2$ <input type="checkbox"/> $a^2 + b^2$
7. $P_B(A)$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $a/2b$ <input type="checkbox"/> $2b/a$ <input checked="" type="checkbox"/> $2a/b$

Partie C

8. U_{n+1} est égale à :	<input type="checkbox"/> $U_n + \frac{1}{2}$ <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{2} U_n$ <input type="checkbox"/> $(U_n)^{\frac{1}{2}}$
9. U_n est égale à :	<input type="checkbox"/> $2 + \frac{1}{2}n$ <input checked="" type="checkbox"/> $2^{(1-n)}$ <input type="checkbox"/> $2^{(n+1)}$
10. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ est égale à :	<input checked="" type="checkbox"/> $31/8$ <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> $15/8$

Exercice 2 :POUR LES CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 points**

1. a) $f(0) = 2$; $f'(0) = 9$. b) $f(1) = 6$; $f'(1) = 0$. c) $f(2) = 4$; $f'(2) = -3$.

d) $f(x) \leq x + 2$ si et seulement si les points de la courbe \mathcal{C}_f sont situés au-dessus des points de la droite \mathcal{D} ou à l'intersection. Ainsi, $f(x) \leq x + 2$ si et seulement si $x \in [2; 4] \cup \{0\}$.

2. a)

x	0	1	3	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	2	↗	↘	↗	6

b) La fonction f étant strictement positive sur $[0; 4]$, la fonction $g = \ln(f)$ est définie sur cet intervalle. De plus, d'après le cours, f et $\ln(f)$ ont alors les mêmes variations, d'où le tableau :

x	0	1	3	4	
$g(x)$	$\ln 2$	↗	↘	↗	$\ln 6$

3. La réponse b) est juste.

On considère les points

$$A'(2; 4), B(3; 3), C(3; 5), D(2; 2), E(4; 2), F(4; 6)$$

. On a les inégalités suivantes :

$$\mathcal{A}(A'BC) \leq A \leq \mathcal{A}(A'DEF), \quad \text{c'est à dire } 1 \leq A \leq 6.$$

4. a) Puisque $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, $f(0) = 2 \iff q = 2$.

Et puisque $f'(x) = 3mx^2 + 2nx + p$, $f'(0) = 9 \iff p = 9$.

b) $f(1) = 6 \iff m + n + 9 + 2 = 6$ et $f'(1) = 0 \iff 3m + 2n + 9 = 0$.

La résolution de ce système d'équations donne

$$m = 1, n = -6, p = 9, q = 2.$$

5. a) Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisses 0 et 4 sont respectivement $f'(0)$ et $f'(4)$. Or, $f'(0) = 9$ et $f'(4) = 9$. Les coefficients directeurs étant égaux, ces deux droites sont parallèles.

b) $A = \int_2^4 (x + 2 - f(x)) \cdot dx = \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) \cdot dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 = 4 \text{ u.a.}$

Exercice 2 :POUR LES CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 points**

Partie A

1. Ce graphe est connexe, mais il admet plus de deux sommets de degré impair, donc il n'admet pas de chaîne eulérienne.

2. On note γ , le nombre chromatique de ce graphe, D le degré maximal des points du graphe et r l'ordre maximal d'un sous-graphe complet extrait du graphe.

On sait d'après le cours que :

$$r \leq \gamma \leq 1 + D$$

Or, $D = D_D = 5$ et $r = r(\text{sous-graphe}(ABCD)) = 4$, ainsi : $4 \leq \gamma \leq 6$.

Partie B

1. On utilise par exemple l'algorithme de Dijkstra, qui donne le tableau suivant :

E	A	B	C	D	G	S	Parcours
0	$E - 4$	$E - 7$	∞	∞	∞	∞	E
0	$E - 4$	$A - 6$	$A - 12$	$A - 13$	∞	∞	$E - A$
0	$E - 4$	$A - 6$	$B - 11$	$B - 12$	∞	∞	$E - A - B$
0	$E - 4$	$A - 6$	$B - 11$	$B - 12$	$C - 15$	$C - 19$	$E - A - B - C$
0	$E - 4$	$A - 6$	$B - 11$	$B - 12$	$C - 15$	$C - 19$	$E - A - B - C - D$
0	$E - 4$	$A - 6$	$B - 11$	$B - 12$	$C - 15$	$C - 19$	$E - A - B - C - D - G$
0	$E - 4$	$A - 6$	$B - 11$	$B - 12$	$C - 15$	$C - 19$	$E - A - B - C - D - G - S$

La trajet le plus rapide est donc $E - A - B - C - S$, il durera 19 minutes.

2. a) Lorsque l'ouvrier est en C , il lui reste à faire le trajet $C - D - S$, ce qui lui prendra 11 minutes supplémentaires. Ainsi, dans ce cas, le trajet sera : $E - A - B - C - D - S$, ce qui lui prendra 22 minutes.

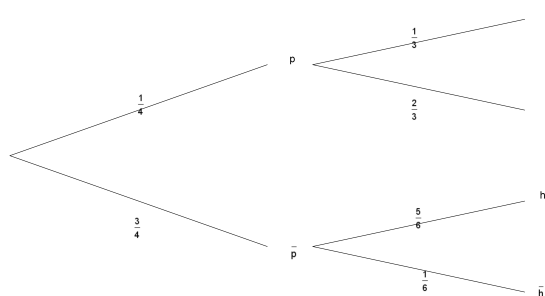
b) L'ouvrier doit passer par, D . Dans ce cas, le trajet sera $E - A - B - D - S$ et il durera 20 minutes.

Exercice 3 :

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

3 points

1. Arbre de probabilité :



2. $P(P \cap H) = P_P(H) \times P(P) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Ainsi, la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est de $\frac{1}{12}$.

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(H) = P(P \cap H) + P(\bar{P} \cap H) = \frac{1}{12} + P_{\bar{P}}(H) \times P(\bar{P}) = \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{17}{24}$$

Ainsi, la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.

4. $P_H(P) = \frac{P(P \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{17}{24}} = \frac{2}{17}$.

Ainsi, sachant que Monsieur X est arrivé à l'heure à son travail, la probabilité qu'il ait plu ce jour là est de $\frac{2}{17}$.

5. $p = 1 - P(\bar{H} \bar{H} \bar{H} \bar{H})$. Or il s'agit d'épreuves aléatoires indépendantes, donc :

$$p = 1 - P(\bar{H})^4 = 1 - \left(\frac{7}{24}\right)^4 \approx 0,993$$

Ainsi, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois au cours de ces 4 jours est d'environ 0,993.

Exercice 4 :

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

7 points

1. On vérifie, d'une part que

$$C_T(0) = 0$$

et d'autre part que

$$C'_T(x) = (2x^2 + xe^{-2x+3})' = 4x + e^{-2x+3} - 2xe^{-2x+3} = 4x + (1 - 2x)e^{-2x+3} = C(x)$$

ce qui prouve que C_T est la primitive sur $[0; 5]$ de C , qui s'annule en 0.

2.

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{2x^2 + xe^{-2x+3}}{x} = 2x + e^{-2x+3}$$

3. a)

$$C'_M(x) = 2 - 2e^{-2x+3} = 2(1 - e^{-2x+3}).$$

b) $1 - e^{-2x+3} = 0$ est équivalent successivement à,
 $1 = e^{-2x+3}$, $e^0 = e^{-2x+3}$, $-2x + 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$.

c) $1 - e^{-2x+3} > 0$. est équivalent successivement à,
 $1 > e^{-2x+3}$, $e^0 > e^{-2x+3}$, $-2x + 3 < 0$, $x > \frac{3}{2}$.

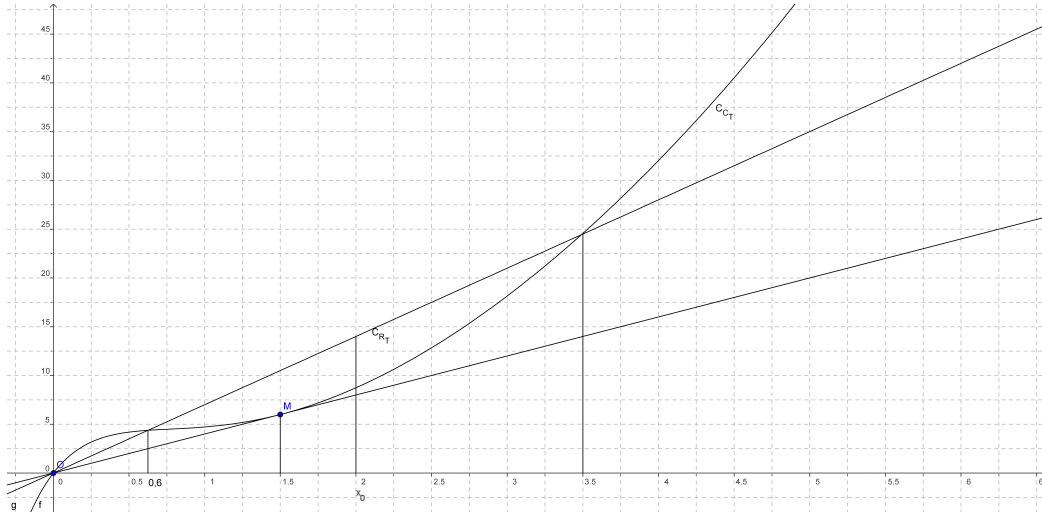
d) D'après le c), pour tout x de $[\frac{3}{2}; 5]$, $C'_M(x) \geq 0$, donc la fonction C_M est croissante sur $[\frac{3}{2}; 5]$;

et pour tout x de $]0; \frac{3}{2}]$, $C'_M(x) \leq 0$, donc la fonction C_M est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$.

4. Grâce au 1.d), on en déduit que le minimum de la fonction est atteint en $x = \frac{3}{2}$, et dans ce cas, $C_M(\frac{3}{2}) = 4$.

Autrement dit, l'entreprise aura un coût moyen minimal de 4000 euros pour la fabrication de 150 objets.

5. a) Lecture graphique.



- Puisque $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{C_T(x) - 0}{x - 0}$, le coût moyen est représenté par le coefficient directeur de la droite (OM) où M est un point de C_T . Graphiquement, ce coefficient directeur est minimal lorsque $x = \frac{3}{2}$.
- Le bénéfice sera positif lorsque la courbe C_{R_T} est située au-dessus de la courbe C_{C_T} . Ce qui, graphiquement, est approximativement le cas dans l'intervalle $[0, 6; 3, 5]$.
- Le bénéfice sera maximal lorsqu'il est positif et que l'écart entre les courbes C_{R_T} et C_{C_T} est le plus grand. Ce qui, graphiquement, correspond à $x_0 \approx 2$. Le bénéfice sera donc maximal pour la production d'environ 200 objets.

b) À l'aide de la calculatrice, on obtient

$$B(0, 62) < 0; B(0, 63) > 0; B(3, 490) > 0; B(3, 491) < 0$$

Ainsi, pour qu'il y ait un bénéfice positif l'entreprise doit produire entre 63 et 349 objets.